

THESIS / THÈSE

DOCTEUR EN SCIENCES

Dynamique séculaire du problème des trois corps appliqué aux systèmes extrasolaires

Libert, Anne-Sophie

Award date:
2007

Awarding institution:
Université de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



**FACULTES UNIVERSITAIRES
NOTRE-DAME DE LA PAIX
NAMUR**

FACULTE DES SCIENCES

Département de Mathématique

Dynamique séculaire du problème des trois corps appliqué aux systèmes extrasolaires

Dissertation présentée par

Anne-Sophie Libert,

Aspirante FNRS,
pour l'obtention du grade
de Docteur en Sciences

Composition du Jury :

Timoteo CARLETTI

Antonio GIORGILLI

Jacques HENRARD (Promoteur)

Jacques LASKAR

Anne LEMAÎTRE

2007

©Presses universitaires de Namur & Anne-Sophie Libert
Rempart de la Vierge, 13
B-5000 Namur (Belgique)

Toute reproduction d'un extrait quelconque de ce livre,
hors des limites restrictives prévues par la loi,
par quelque procédé que ce soit, et notamment par photocopie ou scanner,
est strictement interdite pour tous pays.

Imprimé en Belgique

ISBN : 978-2-87037-568-6
Dépôt légal : D / 2007 / 1881 / 32

**Dynamique séculaire du problème des trois corps
appliqué aux systèmes extrasolaires**
par Anne-Sophie Libert

Résumé : La découverte de planètes extrasolaires d'excentricités importantes ravive l'intérêt pour la dynamique des systèmes planétaires. Ce travail a pour objet l'étude analytique du problème séculaire des trois corps, grâce à une généralisation de la théorie de Laplace-Lagrange obtenue en poussant le développement de la perturbation à un ordre largement supérieur en excentricités et en inclinaisons. Nous montrons que cette approche est apte à décrire la dynamique séculaire d'un système planétaire formé de deux planètes hors résonance en moyen mouvement. Une vérification analytique de la proximité du système à une quelconque résonance en moyen mouvement est également entreprise. Tant dans le cas de systèmes coplanaires que de systèmes tridimensionnels, deux optiques sont poursuivies : d'une part, l'analyse des équilibres du problème séculaire et des implications de ces derniers sur la structure de l'espace de phase et d'autre part, le calcul des fréquences fondamentales de ce même problème permettant la reproduction de l'évolution temporelle du système planétaire, grâce à une méthode totalement analytique basée sur les transformées de Lie. Nous disposons ainsi d'un modèle analytique fiable et peu coûteux pouvant prendre en compte un large éventail de paramètres et qui peut être appliqué avec précision aux systèmes extrasolaires hors résonance en moyen mouvement.

Secular dynamics of the exoplanetary three-body problem
by Anne-Sophie Libert

Abstract : The discovery of extrasolar planets with large eccentricities renews interest in the study of the dynamics of planetary systems. This work is concerned with the analytical study of the secular three-body problem by means of a generalization of the Laplace-Lagrange theory based on a high-order expansion of the disturbing potential in the eccentricities and the inclinations. We show that this approach is able to describe the secular dynamics of a two-planets system not close to a mean motion resonance. The proximity of a system to any mean motion resonance is also analytically investigated. For coplanar and tridimensional systems, we pursue a twofold objective: on the one hand, the study of the equilibria of the secular problem and their implications on the structure of the phase space and on the other hand, the computation of both the fundamental frequencies of the problem and the long-term time evolution of the planetary system with a totally analytical method based on Lie transforms. This reliable time-saving analytical model can take into account a large spectrum of parameters and can be applied successfully to non-resonant extrasolar systems.

Dissertation doctorale en Sciences mathématiques (Ph.D. thesis in Mathematics)
Date : 24-10-2007
Département de Mathématique
Unité de Systèmes Dynamiques
Promoteur (Advisor) : Prof. J. HENRARD

“L’UNIVERS EST INFINI. (...)
LES MONDES DE MÊME
SONT EN NOMBRE INFINI,
AUSSI BIEN CEUX QUI
RESSEMBLENT AU NÔTRE
QUE CEUX QUI EN DIFFÈRENT.”

ÉPICURE (341-270 ACN), Lettre à Hérodoté

Remerciements

La rédaction de ce manuscrit me donne l'opportunité de pouvoir remercier tout ceux qui ont collaboré à rendre inoubliables les trois années de recherche qui viennent de s'écouler.

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma profonde reconnaissance à Jacques Henrard, mon promoteur, pour avoir accepté d'être mon guide dans la découverte de la Mécanique Céleste ainsi que pour son encadrement, son soutien et ses conseils inégalables qui ont permis la réalisation de ce travail. Je le remercie également pour le temps et l'attention qu'il m'a consacrés. Ses connaissances et sa vivacité d'esprit m'ont toujours fascinée. Travailler à ses côtés fut pour moi une expérience aussi riche scientifiquement qu'humainement.

Je tiens également à remercier Anne Lemaître pour avoir rempli avec tant d'entrain et de gentillesse le rôle de co-promoteur. Sa disponibilité constante et son dynamisme incomparable sont autant de motivations pour l'équipe de Systèmes dynamiques.

J'adresse également mes remerciements à Timoteo Carletti, Antonio Giorgilli et Jacques Laskar pour avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse ainsi que pour leurs remarques pertinentes.

Un merci tout particulier à Sebastian Xhonneux pour son implication continuelle et multilingue. Je garderai gravées toutes ces années vécues côte à côte au bureau du premier étage.

Merci également à tous mes collègues de l'unité de Systèmes dynamiques, chaque année plus nombreux, pour leur collaboration et leur disponibilité. Merci en particulier à Stéphane Valk pour m'avoir maintes fois secourue devant les problèmes informatiques ainsi que pour sa complicité quotidienne.

Je remercie également le Fonds National de la Recherche Scientifique pour la bourse de mandat d'aspirant dont j'ai bénéficié et qui m'a permis de mener à bien cette recherche.

J'adresse aussi mes remerciements, pour nos discussions fructueuses, à tous les chercheurs que j'ai rencontrés lors de conférences internationales ou d'écoles doctorales ainsi qu'au travers de nombreux rapports de referee. Je pense notamment à Cristian Beaugé, Sylvio Ferraz-Mello,

Jacques Laskar, Ugo Locatelli et Philippe Robutel qui, par ces échanges, ont sans conteste enrichi ce travail. Merci également à Massimiliano Guzzo et Florent Deleffie pour leur attention particulière.

Merci aussi à Benoît Noyelles pour m'avoir initiée à l'analyse en fréquence et pour la mise à disposition de son code.

Je tiens encore à remercier tous les membres du département de Mathématique pour leur accueil chaleureux tout au long de ces trois années. Merci également aux secrétaires du département, Pascale Hermans et Martine Van Caenegem, pour leur dévouement.

Ce travail a également bénéficié du soutien et de la bonne humeur journalière des “copains du midi”. Merci à Caroline Sainvitu pour la relecture assidue de ce manuscrit, à Emilie Wanufelle pour nos rédactions simultanées, à Vincent Malmedy pour ses secours Latex et à tous les autres pour leur écoute inlassable.

Merci au professeur Van Elsuwé de m'avoir transmis, dès mes études secondaires, son enthousiasme des mathématiques.

Enfin, *last but not least*, merci à ma famille et à mes amis d'être jour après jour à mes côtés et de m'entourer de ce soutien intarissable qui est mon plus grand allié.

A tous, encore merci !

Table des matières

Introduction	1
I PRÉLIMINAIRES	3
1 Systèmes extrasolaires	5
1.1 La révolution copernicienne	5
1.2 La détection des exoplanètes	7
1.2.1 Premières découvertes	7
1.2.2 Difficultés et limitations des méthodes de détection	7
1.3 Des planètes aux caractéristiques surprenantes... et les premiers questionnements	10
1.3.1 Des “Jupiters chauds”	11
1.3.2 Des excentricités importantes	13
1.4 Les systèmes extrasolaires	15
1.4.1 Classification des systèmes extrasolaires	15
1.4.2 Littérature existante portant sur la dynamique séculaire non-résonante des systèmes extrasolaires	19
1.5 Plan de thèse	21
2 Le problème des trois corps	23
2.1 Formulation hamiltonienne du problème des trois corps	23
2.2 Développement de la perturbation en excentricités et en inclinaisons	25
2.3 Théorie des perturbations par transformées de Lie symplectiques	29
2.3.1 Transformées de Lie symplectiques et algorithme de calcul	30
2.3.2 Cadre hamiltonien et équation homologique	32
2.4 Le manipulateur de séries MSNam	33
II SYSTÈMES COPLANAIRES	37
3 Résonance séculaire non-linéaire du problème coplaire des trois corps	41
3.1 Hamiltonien du problème coplaire	42
3.2 Réduction à un degré de liberté et représentation de l’espace de phase	47
3.3 Fréquences linéaires	51

3.4	Résonance séculaire non-linéaire à modérées et hautes excentricités	55
4	Comportement séculaire des systèmes extrasolaires supposés coplanaires	61
4.1	Fréquences non-linéaires par transformées de Lie	62
4.2	Eléments moyens par l'algorithme inverse	65
4.3	Synthèse des différentes transformations	66
4.4	Précision de l'approche totalement analytique dans le cas du système ν Andromède	67
4.5	Sensibilité aux conditions initiales	70
4.6	Application à différents systèmes extrasolaires	73
4.7	Comparaison avec d'autres études	73
5	Proximité des systèmes extrasolaires aux résonances en moyen mouvement	79
5.1	Effets de la proximité à la résonance en moyen mouvement sur la moyennisation au premier ordre des masses	80
5.2	Application à différents systèmes extrasolaires	83
5.3	Etude de l'étendue de la zone de résonance 5/1 à proximité du système ν Andromède	85
5.4	Avantages et limitations de la moyennisation par rapport aux courtes périodes .	87
5.4.1	Influence des anomalies moyennes sur le comportement à long terme .	87
5.4.2	Prise en compte des anomalies moyennes au premier ordre des masses .	88
III	SYSTÈMES TRIDIMENSIONNELS	91
6	Implications du changement de stabilité d'un équilibre à haute inclinaison mutuelle dans l'apparition de résonances séculaires	95
6.1	Hamiltonien du problème non-coplanair	96
6.1.1	Réduction à deux degrés de liberté	96
6.1.2	Symétries du problème réduit	101
6.2	Etude de l'équilibre central et construction d'une représentation géométrique .	103
6.3	Changement de stabilité de l'équilibre central	105
6.3.1	Observation géométrique du changement de stabilité	105
6.3.2	Etude analytique de la stabilité linéaire des équilibres de l'Hamiltonien séculaire	108
6.4	Etude paramétrique de la bifurcation de l'équilibre central	110
6.4.1	Dépendance de la bifurcation aux paramètres α , μ et Σ	110
6.4.2	Interprétation de la bifurcation en termes de fréquences	113
6.5	Surfaces de section	114
6.5.1	Un problème simplifié	114
6.5.2	Le problème séculaire des trois corps	116
6.6	Autre plan représentatif et équilibres supplémentaires	121
6.7	Lien avec le problème séculaire coplanair des trois corps	124

7 Comportement séculaire des systèmes extrasolaires tridimensionnels	129
7.1 Fréquences fondamentales du problème tridimensionnel des trois corps	130
7.1.1 Formulation angle-action du problème de Laplace-Lagrange	130
7.1.2 Formulation angle-action du problème non-linéaire	131
7.2 Comparaison des évolutions séculaires dans deux référentiels différents	134
7.2.1 Référentiel général	134
7.2.2 Référentiel lié au plan de Laplace	138
7.2.3 Précision de l'approche totalement analytique	141
7.3 Sensibilité aux conditions initiales	143
7.4 Effets d'une augmentation de l'inclinaison mutuelle sur la dynamique séculaire de l'exosystème ν Andromède	146
Conclusions et perspectives	149
Annexes	153
A Notations principales	153
B Problème des deux corps et variables de Delaunay modifiées	155
C Développement analytique du problème des trois corps	159
C.1 Passage aux coordonnées de Jacobi	160
C.2 Passage aux éléments de Delaunay	161
C.3 Développement de l'Hamiltonien au second degré des masses	162
D Séries caractéristiques de la dynamique de l'exosystème ν Andromède supposé coplanaire	165
D.1 Série \mathcal{K} (Eq. (3.6))	165
D.2 Série \mathcal{K}' (Eq. (4.2))	168
D.3 Série $\bar{\mathcal{K}}'$ (Eq. (4.5))	170
D.4 Générateur \mathcal{W} (Eq. (4.4))	171
E Contributions	173
Bibliographie	175

Introduction

Depuis le 5 octobre 1995, date de l'annonce de la découverte d'une première planète extrasolaire autour de l'étoile de type solaire 51Pegase, notre vision du monde n'a eu de cesse d'être modifiée. Pensant avoir élucidé la formation du Système Solaire avec ses deux catégories de planètes aux orbites presque circulaires et proches d'un même plan, quelle ne fut pas la surprise des scientifiques de découvrir l'existence de systèmes planétaires si différents du nôtre, dont les distinctions les plus marquantes sont, pour le moment, les formes réellement très elliptiques des orbites de nombreuses planètes et l'existence de planètes de masses comparables à celle de Jupiter et de périodes de révolution autour de leur étoile n'excédant pas quelques jours, les Jupiters chauds.

La découverte d'exoplanètes aux caractéristiques si surprenantes remet à l'ordre du jour l'étude de la dynamique des systèmes planétaires. En effet, le cadre théorique bien établi pour l'analyse des perturbations séculaires des planètes du Système Solaire, connu sous le nom de théorie de Laplace-Lagrange, est mis à mal par les excentricités importantes de ces nouveaux mondes et doit être considérablement élargi si nous voulons pouvoir également l'appliquer au cas des systèmes extrasolaires.

Dans cette étude, nous nous proposons de généraliser l'approche analytique de Laplace-Lagrange en poussant le développement de la perturbation à un ordre largement supérieur en excentricités et en inclinaisons. Malgré ses limites sur les valeurs des excentricités et des inclinaisons, il est intéressant d'examiner si cette approche analytique peut être appliquée avec succès à tous les systèmes extrasolaires actuellement détectés, formés de deux planètes et dont les périodes de révolution ne sont pas commensurables. Deux optiques sont poursuivies : d'une part, l'analyse des équilibres du problème séculaire et de leurs implications sur la structure de l'espace de phase (Chapitres 3 et 6) et d'autre part, le calcul des fréquences fondamentales de ce même problème permettant la reproduction de l'évolution temporelle du système par un développement totalement analytique (Chapitres 4 et 7).

Le présent travail est scindé en trois parties. La première comprend une introduction aux systèmes extrasolaires (Chapitre 1) et au développement de l'Hamiltonien du problème des trois corps permettant la mise en oeuvre de la théorie des perturbations à la base des résultats de cette étude (Chapitre 2). L'inclinaison mutuelle des plans orbitaux des exoplanètes d'un même système restant pour le moment un mystère, la dynamique séculaire des systèmes extrasolaires supposés coplanaires est l'objet de la deuxième partie. Enfin, la dernière partie généralise les

résultats précédents à des systèmes tridimensionnels et analyse les comportements séculaires que possèdent peut-être les nouveaux mondes si, tout comme les excentricités, les inclinaisons mutuelles des planètes extrasolaires sont, elles aussi, étonnamment élevées.

Première partie

PRÉLIMINAIRES

Chapitre 1

Systèmes extrasolaires

1.1 La révolution copernicienne

La question de la *pluralité des mondes* taraude les esprits des hommes depuis des siècles. Ainsi, les philosophes grecs de l'Antiquité sont déjà divisés par cette question. Par exemple, Epicure (341-270 ACN) conçoit l'existence d'une infinité de mondes ("L'Univers est infini. (...) Les mondes de même sont en nombre infini, aussi bien ceux qui ressemblent au nôtre que ceux qui en diffèrent.", *Lettre à Hérodoté*). Mais le courant de pensée le plus largement répandu à l'époque est le géocentrisme d'Aristote (384-322 ACN). La représentation du monde de ce dernier, suggérée par les écoles les plus anciennes, divise l'Univers en deux mondes différents : d'une part, le monde sublunaire, monde terrestre soumis à la corruption, l'évolution, l'altération et composé des quatre éléments originaux (Terre, Eau, Air et Feu), et d'autre part, le Cosmos, monde parfait des astres, immuable, composé de la Lune, du Soleil, des planètes (nom dérivé du mot grec signifiant "astre errant") et des étoiles. Tous ces éléments sont situés sur des sphères (la forme symbolisant la perfection pour les grecs) concentriques centrées sur la Terre, qui est, par conséquent, unique dans cette représentation du monde (cfr Figure 1.1). Cependant, cette théorie n'explique point le mouvement rétrograde que présentent les planètes dans le ciel.

Dans son *Almageste*, Ptolémée (IIe siècle ACN) réconcilie ce phénomène avec la vision aristotélicienne grâce à la théorie des épicycles : les planètes évoluent sur un petit cercle (épicycle) dont le centre décrit lui-même une rotation autour de la Terre (déférent). Appuyé par des convictions religieuses plaçant la Terre et l'Homme au centre de l'Univers, ce modèle géocentriste, amélioré sans cesse à l'aide d'épicycles supplémentaires afin de produire des tables astronomiques de plus en plus précises, perdurera pendant plus d'un millénaire, en dépit de travaux novateurs, tels ceux d'Aristarque de Samos (IIIe siècle ACN) ou de Nicolas de Cuse (1401-1463).

C'est à Nicolas Copernic (1473-1543) que l'on doit l'avènement du système héliocentrique (*De Revolutionibus orbium coelestium*, 1543) suggérant que la Terre n'est plus le centre de l'Univers mais une planète comme les autres en orbite autour du Soleil ("Tous les mouvements apparents que l'on constate au firmament sont dûs aux mouvements de la Terre et non du firma-

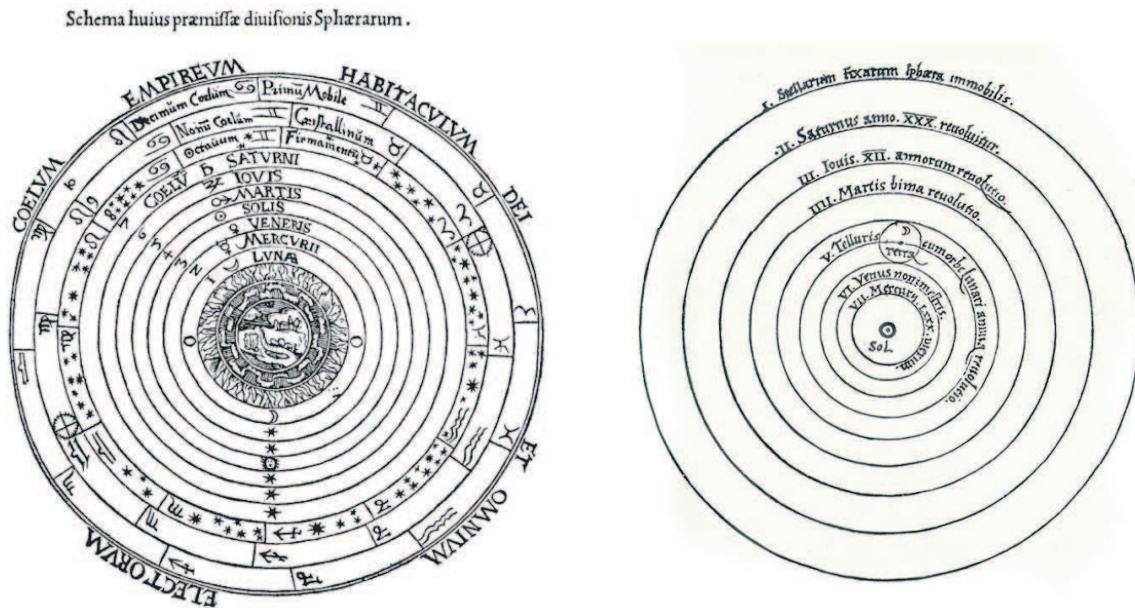


FIG. 1.1: Représentations du système géocentrique de Ptolémée (à gauche, extrait de *Cosmographia* (Peter Apian, Anvers, 1539)) et du système héliocentrique de Copernic (à droite, extrait de *De Revolutionibus orbium coelestium*)

ment.”, *Commentariolus*). Cette théorie révolutionnaire (cfr Figure 1.1), en contradiction avec la pensée de l’Eglise catholique, finit par s’imposer grâce aux travaux de mathématiciens et d’astronomes qui apportèrent, par leurs calculs et leurs observations, la justification scientifique du modèle copernicien.

En effet, s’appuyant sur les observations du mouvement de Mars de Tycho Brahé (1546-1601), Kepler (1571-1630) s’aperçoit que les orbites décrites par les planètes sont en réalité des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers. C’est la première des trois célèbres *lois de Kepler* décrivant le mouvement des planètes autour du Soleil (cfr Annexe B). Les observations de Galilée (1564-1642), inventeur de la première lunette astronomique, confirment la théorie de Copernic. Finalement, Isaac Newton (1642-1727) énonce en 1687 la loi de la gravitation universelle (*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*), preuve mathématique du modèle copernicien.

La révolution copernicienne est à la base d’une nouvelle réflexion philosophique quant à la pluralité des mondes : la Terre détrônée du centre de l’Univers et tournant autour du Soleil, les autres étoiles sont-elles également entourées d’une escorte de planètes ? C’est en tout cas l’hypothèse du philosophe italien Giordano Bruno (1548-1600) accusé d’hérésie par l’Inquisition et condamné au bûcher (“Un nombre infini de soleils existent ; un nombre infini de terres tournent autour de ces soleils comme les sept planètes tournent autour de notre soleil. Des êtres vivants habitent ces mondes.”, *De l’infinito universo et Mondi*). Les moyens observationnels de l’époque rendant toute vérification impossible, il faut attendre la fin du XXe siècle pour

que les astronomes apportent une réponse positive à cette question existentielle... une nouvelle révolution copernicienne.

1.2 La détection des exoplanètes

1.2.1 Premières découvertes

En 1995 les astronomes suisses Michel Mayor et Didier Queloz annoncent la découverte, à l'Observatoire de Haute-Provence, de la première¹ *planète extrasolaire* en orbite autour d'une autre étoile de type solaire, 51Pegase ([Mayor et Queloz, 1995]). Le compagnon planétaire est doté d'une masse au moins égale à la moitié de celle de Jupiter et orbite autour de son étoile en seulement 4.2 jours (soit une distance à l'étoile vingt fois inférieure à la distance Terre-Soleil)... des caractéristiques bien différentes de celles des planètes du Système Solaire.

Cette découverte ne relève pas d'une observation directe ; cette dernière n'est, en effet, pas chose facile avec les instruments actuels car le contraste lumineux entre la planète et l'étoile est très grand et la séparation angulaire minuscule. Elle a été rendue possible grâce à la *méthode des vitesses radiales* qui consiste à mesurer les variations de vitesse de l'étoile dans la direction de la ligne de vue de l'observateur. En effet, l'étude du problème des deux corps (cfr Annexe B) montre que lorsqu'une étoile possède un compagnon, les deux corps célestes se déplacent autour du centre de gravité du système étoile-planète. Les variations de la vitesse de l'étoile, mesurées grâce à l'effet Doppler, peuvent donc mettre en évidence un éventuel mouvement périodique de l'étoile, témoin de la présence d'une planète de même périodicité.

A ce jour, près de 250 planètes extrasolaires ont été détectées, la quasi-totalité grâce à la technique des vitesses radiales. Pour une liste des découvertes actualisée quotidiennement, nous renvoyons à "L'encyclopédie des planètes extrasolaires" de Jean Schneider accessible à l'adresse internet <http://exoplanet.eu/> et d'où proviennent les éléments orbitaux des exosystèmes considérés dans ce travail.

1.2.2 Difficultés et limitations des méthodes de détection

Découvrir une exoplanète est loin d'être une sinécure. La *détection par imagerie directe* est, comme nous l'avons dit précédemment, une des techniques les plus difficiles à mettre en oeuvre mais également l'une des plus prometteuses puisqu'elle permet d'accéder à de nombreux paramètres tels la température, la masse, l'âge, l'albédo, la composition chimique mais également l'orbite (y compris l'inclinaison) de la planète. Une solution au problème de la trop petite séparation angulaire de l'étoile et de son compagnon peut être apportée par l'optique adaptative (qui permet de corriger la turbulence atmosphérique sur les grands miroirs). C'est cette technique

¹En réalité, les premières planètes extrasolaires furent découvertes en 1992 autour du pulsar PSR 1257+12 ([Wolszczan et Frail, 1992]). Compte tenu de la violence de l'explosion des supernovas à l'origine des pulsars, ces planètes sont probablement des planètes de seconde génération.

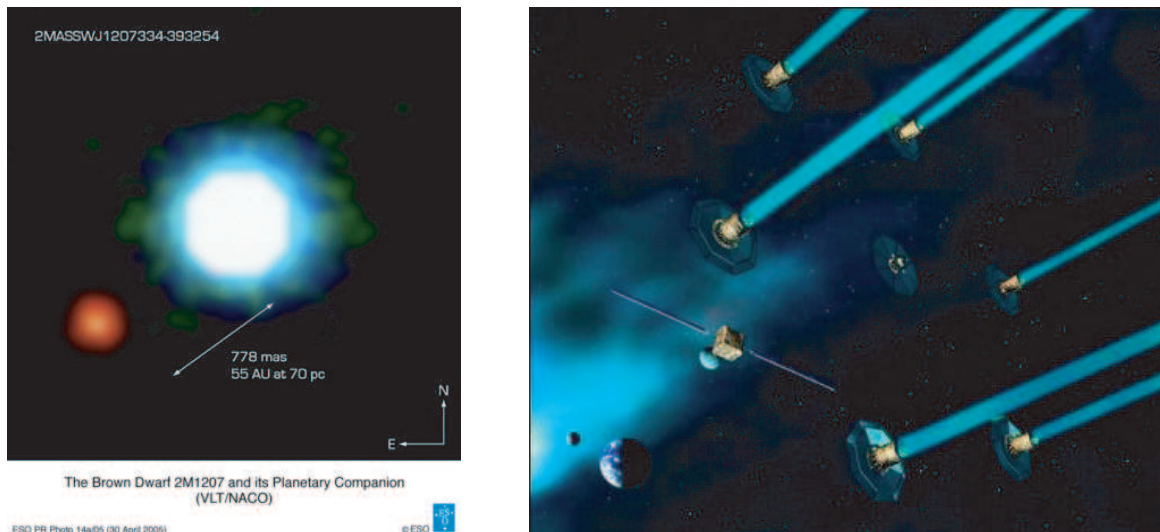


FIG. 1.2: *A gauche* : Première image confirmée d’une exoplanète obtenue en 2004 par un des télescopes du VLT (ESO) [Chauvin et al., 2005]. Il s’agit d’une planète de $5M_J$ en orbite autour de la naine brune 2M1207 à 55 UA. *A droite* : Une vue d’artiste de la mission DARWIN avec six satellites périphériques munis de télescopes, un satellite central pour la recombinaison des images et un dernier satellite pour les communications. L’ensemble devrait être placé au point de Lagrange L_2 , situé sur l’axe Soleil-Terre dans la direction opposée au Soleil. Crédit : ESA/Medialab

qui a permis d’obtenir, en 2004, la *première image* d’une planète extrasolaire (cfr Figure 1.2), planète de cinq fois la masse de Jupiter en orbite autour de la naine brune 2M1207 à 55 UA. De plus, il est également possible d’atténuer le contraste entre les deux corps grâce à la coronagraphie stellaire. Enfin, la technique d’interférométrie à “franges noires” utilise plusieurs télescopes connexes construits de manière à “éteindre” l’étoile au centre. C’est sur cette méthode qu’est basée la future mission spatiale DARWIN, projet ambitieux de l’ESA qui devrait voir le jour aux alentours de 2020 (cfr Figure 1.2). A ce jour, seules les images de planètes géantes peuvent être obtenues et quatre planètes extrasolaires à grande distance orbitale de leur étoile ont ainsi été détectées par imagerie directe depuis le sol. DARWIN devrait permettre la détection d’exoTerres et, s’il y a lieu, la détection de signatures spectroscopiques, tels l’oxygène et la vapeur d’eau, dans l’atmosphère de ces dernières, témoins potentiels de la présence de vie sur ces autres mondes.

Une solution aux difficultés rencontrées par l’observation directe est de détecter les planètes extrasolaires de manière indirecte en mesurant la perturbation gravitationnelle induite par la (ou les) planète(s) sur l’étoile. Il est ainsi possible de repérer le déplacement périodique de l’étoile sur le ciel (*astrométrie*) ou de mesurer la variation périodique de la vitesse projetée sur la ligne de visée (*vitesses radiales*). En ce qui concerne cette dernière discipline, grâce à la masse de l’étoile estimée en fonction de sa luminosité et de sa couleur, il est possible de déterminer, par ajustement de la courbe des vitesses radiales, certains des paramètres orbitaux osculateurs (le

demi-grand axe a directement relié à la période par la troisième loi de Kepler, l'excentricité e , l'argument du péricentre ω , le temps de passage au péricentre τ) ainsi que la *masse minimale* de la planète, $m \sin i$ où i est l'inclinaison du plan orbital de la planète par rapport au plan du ciel et ne peut être déterminée. Ainsi, si le système est dans notre ligne de visée (c'est-à-dire $i = 90^\circ$), les vitesses angulaires sont maximales et la masse détectée de la planète correspond à la valeur réelle. L'indétermination des inclinaisons est une des grandes limitations de cette technique et un obstacle majeur dans l'élaboration des théories de formation ou d'évolution des systèmes extrasolaires. De plus, cette méthode favorise la découverte de planètes de masses importantes et de périodes courtes car ces dernières entraînent une perturbation des vitesses radiales plus marquée.

A ce jour, la méthode des vitesses radiales a permis la détection de 233 planètes et est la plus utilisée. Cette méthode exige une grande précision dans les mesures Doppler et peut atteindre actuellement la précision du mètre par seconde, comme c'est le cas pour le spectrographe HARPS de l'Observatoire de l'ESO (La Silla, Chili). Pour comparaison, dans le cas du système Soleil-Jupiter, Jupiter effectue une révolution en 11.9 ans autour du centre de gravité du système sur un rayon de 5.2 UA à la vitesse de 13 km/s tandis que sur cette même période le Soleil effectue, à la vitesse de 12 m/s, une révolution autour de ce même centre situé à seulement 0.005 UA. Et dans le cas du système Soleil-Terre, la vitesse du Soleil n'est plus que de 9 cm/s, ce qui explique que l'observation d'exoplanètes de type terrestre par cette méthode est pour le moment impossible. De plus, afin de détecter sans ambiguïté une planète, il est nécessaire d'effectuer les mesures de la vitesse radiale de son étoile pendant un laps de temps supérieur à la période de révolution de la planète, ce qui explique qu'après seulement dix années d'observation seules des planètes de courtes périodes orbitales ont pu être découvertes. A cette limitation s'ajoutent les erreurs importantes dans l'estimation des masses des étoiles et la complexité de déterminer les éléments orbitaux dans le cas d'un système comportant plusieurs planètes dont les interactions gravitationnelles entre ces dernières doivent également être prises en compte dans l'ajustement de la courbe des vitesses radiales.

Une autre technique commence à porter ses fruits : la *méthode des transits* c'est-à-dire l'observation de passages d'exoplanètes devant leur étoile qui produisent ainsi une baisse de flux lumineux stellaire de 1% pour une planète du diamètre de Jupiter (environ le dixième de celui du Soleil) et de 0.01% pour une planète de type terrestre. Cette diminution de flux peut être détectée et quantifiée, et permet la déduction du rayon de la planète. La durée du transit est fonction, entre autres, de la période de révolution de la planète et de l'inclinaison de l'orbite par rapport au plan du ciel, inclinaison qui est proche de 90° car l'observation d'un transit implique que le plan orbital de la planète soit proche de notre ligne de visée. Ainsi, grâce à des observations complémentaires par la méthode des vitesses radiales, il est possible de déterminer la masse réelle de l'exoplanète et, par là-même, sa densité. D'autres caractéristiques comme la température de la planète, l'albédo, la présence de satellites ou d'anneaux et la composition de l'atmosphère peuvent également être connues. La limite évidente de cette technique est la faible chance qu'une planète passe entre son étoile et l'observateur. La probabilité de transit est

TAB. 1.1: Nombre de détections recensées pour chacune des méthodes au 10 juillet 2007 dans “L’encyclopédie des planètes extrasolaires” de Jean Schneider (<http://exoplanet.eu/>)

Méthode de détection	Nombre de planètes	Nombre de systèmes planétaires multiples
vitesses radiales	233	25
transit	21	0
microlentille	4	0
imagerie	4	0
chronométrage de pulsars	4	1
Nombre d’exoplanètes découvertes	245	

bien sûr plus élevée pour des planètes proches de leur étoile. De plus, comme il est nécessaire de reproduire environ cinq fois l’observation du transit pour le confirmer, la méthode utilisée depuis une dizaine d’années seulement est biaisée en faveur des planètes de courtes périodes, tout comme l’était celle des vitesses radiales. Actuellement environ vingt planètes géantes ont été détectées par la méthode des transits qui souffre essentiellement des limitations causées par la turbulence atmosphérique. D’où la nécessité de missions spatiales telles que COROT (CNES - ESA) dont le satellite a été lancé en orbite polaire le 26 décembre 2006 et qui est la seule mission spatiale à être déjà en opération. Elle devrait être en mesure de détecter, par transit, des planètes aussi petites que la Terre. Son pendant américain, la mission KEPLER de la NASA (satellite tournant autour du Soleil sur la même orbite que la Terre), est programmé pour 2008.

Enfin, signalons l’existence d’autres méthodes de détection telles que celle des microlentilles gravitationnelles ou le chronométrage des pulsars. L’ensemble de ces méthodes est repris sous forme de diagramme à la Figure 1.3, synthèse qui est le fruit du travail de [Perryman, 2000] (remis à jour en 2007), auquel nous renvoyons pour de plus amples informations sur chacune des méthodes. Un complément d’information sur les différentes méthodes peut également être trouvé dans [Ecole CNRS de Goutelas, 2005]. La Table 1.1 complète cette étude en indiquant le nombre de détections recensées, à la date du 10 juillet 2007, dans le catalogue de Jean Schneider.

1.3 Des planètes aux caractéristiques surprenantes... et les premiers questionnements

Près de 250 exoplanètes ont actuellement été découvertes et seulement peu d’entre elles possèdent les mêmes caractéristiques que les planètes du Système Solaire. Cette grande diversité de planètes extrasolaires met à mal les théories de formation et d’évolution des systèmes planétaires conçues initialement pour modéliser au mieux notre système planétaire. Tout en étant attentifs aux biais observationnels identifiés ci-dessus, voyons les caractéristiques essentielles

Planet Detection Methods

Michael Perryman, Rep. Prog. Phys., 2000, 63, 1209 (updated April 2007)
[corrections or suggestions please to michael.perryman@esa.int]

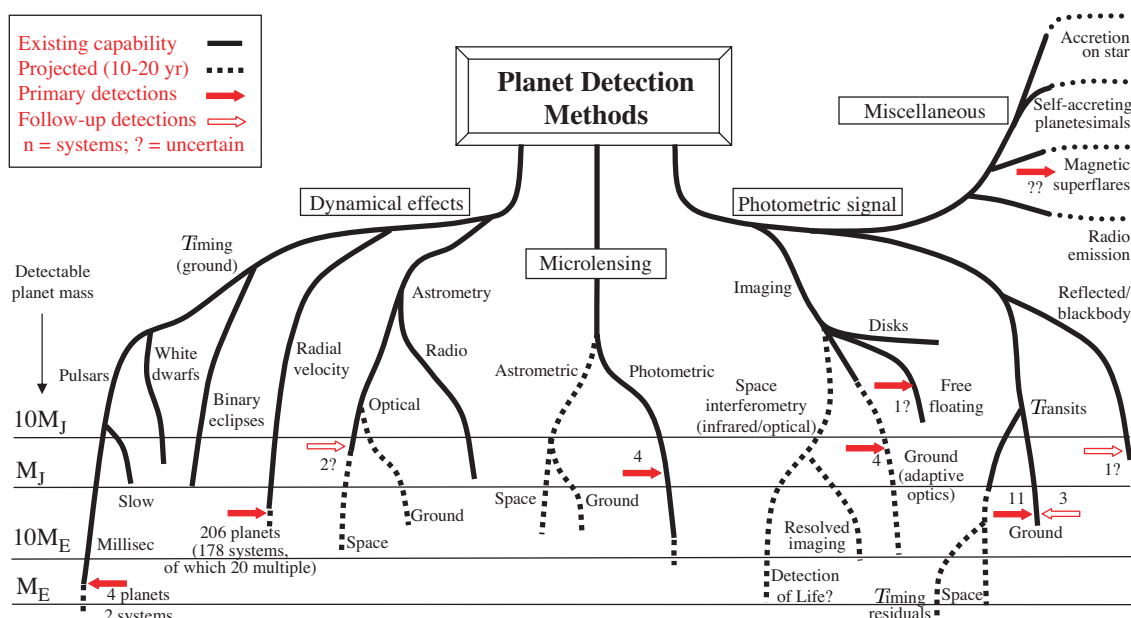


FIG. 1.3: Synthèse des différentes méthodes de détection des planètes extrasolaires publiée dans [Perryman, 2000] et remise à jour en avril 2007 (Source : <http://exoplanet.eu/pictures.html>)

de ces nouveaux mondes et leurs implications sur les théories scientifiques existantes².

1.3.1 Des “Jupiters chauds”

Concernant tout d’abord les masses des exoplanètes découvertes, il apparaît qu’elles sont impressionnantes et varient de $0.02M_J$ (Gl 581 c), c’est-à-dire environ $6M_T$, à $22M_J$ (GQ Lup b) selon la distribution représentée à la Figure 1.4. Deux remarques s’imposent d’emblée : les masses les plus faibles sont de l’ordre de la masse de Neptune en raison des limites de détection actuelles et les masses les plus élevées correspondent vraisemblablement non pas à des planètes mais plutôt à des naines brunes. De plus, comme nous l’avons vu, toutes ces masses ne sont que des valeurs minimales. Alors que la méthode principale de détection, celle des vitesses radiales, favorise les découvertes de planètes de masses importantes, la Figure 1.4 montre une préférence

²Pour une analyse plus complète des caractéristiques des systèmes extrasolaires, nous renvoyons à [Ecole CNRS de Goutelas, 2005] ou à [Casoli et Encrenaz, 2005] (approche vulgarisée).

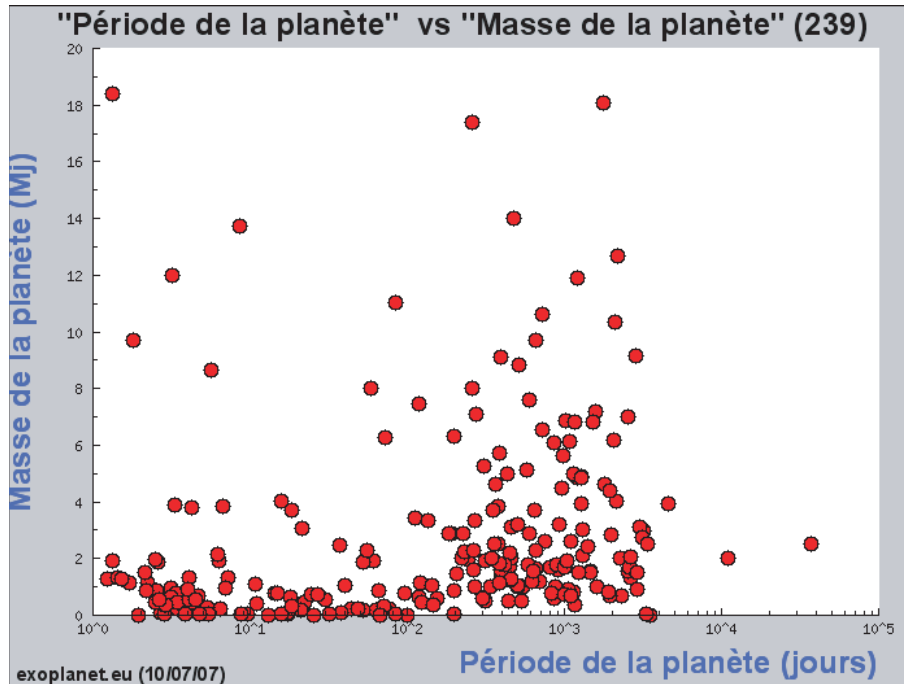


FIG. 1.4: Diagramme de corrélation entre les périodes de révolution (en jour, échelle logarithmique) et les masses (en M_J) des planètes extrasolaires détectées au 10 juillet 2007. Source : <http://exoplanet.eu/>

marquée pour les masses inférieures à environ deux fois celle de Jupiter. Ceci laisse présager une distribution des masses dans laquelle les petites masses de type terrestre seraient les plus abondantes, ce qui serait tout de même assez conforme au Système Solaire.

Ce qui, par contre, à la lumière de notre système planétaire, était jusqu'il y a peu inconcevable est l'existence de planètes géantes à une telle proximité de leur étoile que leur révolution dure tout au plus quelques jours. Ces planètes sont surnommées *Jupiters chauds*. Le record de la plus petite période de révolution revient à l'exoplanète OGLE-TR-56 b de $1.29M_J$ et à une distance de 0.023 UA de son étoile (soit une période de révolution de 1.2 jours). Pour comparaison, rappelons que la période de révolution de la planète la plus proche du Soleil, Mercure, est de 88 jours et que la masse de celle-ci n'est que de $0.0002M_J$.

Expliquer la présence de tels monstres si proches de leur étoile est un vrai casse-tête pour les théoriciens et remet en question le modèle de formation des systèmes planétaires mis au point pour le Système Solaire. Même s'il semble clair qu'il faille y inclure un scénario de migration planétaire pour expliquer l'existence des Jupiters chauds, beaucoup de questions demeurent toujours sans réponse (qu'est-ce qui provoque l'arrêt de la migration ? pourquoi le Système Solaire ne possède-t-il pas de Jupiter chaud ? ...). De nos jours, les études portant sur la migration planétaire foisonnent, même s'il est à remarquer que les premières ont été entreprises avant la découverte de la première exoplanète (e.g. [Goldreich et Tremaine, 1980], [Lin et Papaloizou, 1986]). La migration orbitale peut être due à différents processus physiques comme les interactions gra-

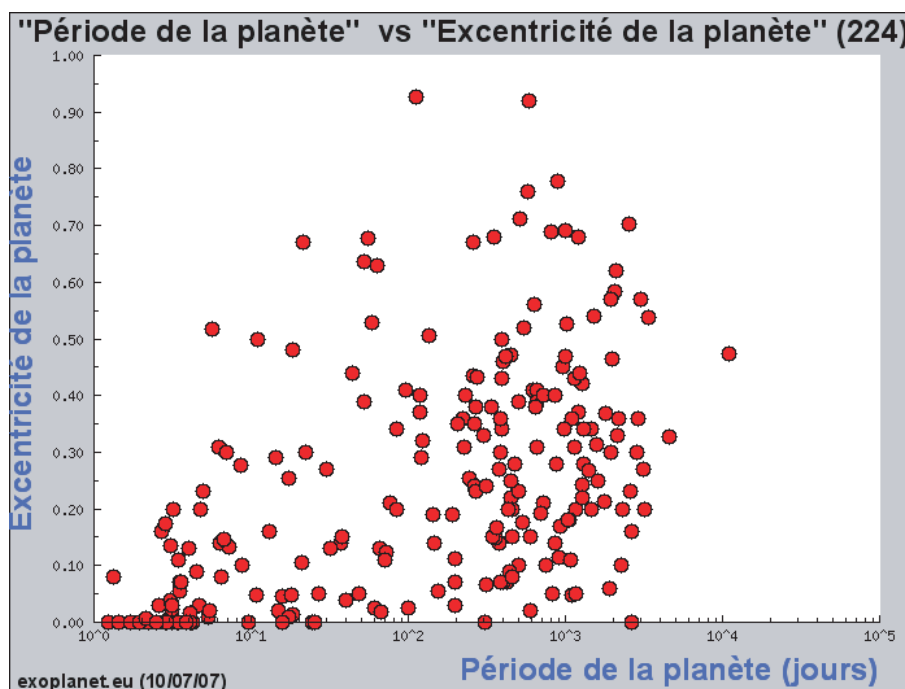


FIG. 1.5: Diagramme de corrélation entre les périodes de révolution (en jour, échelle logarithmique) et les excentricités des planètes extrasolaires détectées au 10 juillet 2007. Source : <http://exoplanet.eu/>

vitationnelles entre planètes de systèmes multiples (e.g. [Marzari et Weidenschilling, 2002]) ou les interactions gravitationnelles de la planète avec le gaz (e.g. [Lin et al., 1996]) et/ou avec le disque des planétésimaux (e.g. [Murray et al., 1998]).

Enfin, remarquons que la Figure 1.4 semble indiquer qu'il existe une relation entre les masses et les périodes de révolution. En effet, peu de planètes semblent être à la fois très massives et très proches de leur étoile alors que ce sont les planètes les plus faciles à détecter par vitesses radiales. Ceci semblerait indiquer que les planètes les plus massives migrent moins.

1.3.2 Des excentricités importantes

Une autre découverte surprenante quant aux caractéristiques de ces nouvelles planètes est à l'origine de nombreuses nouvelles recherches en mécanique céleste, dont ce travail notamment : les formes très elliptiques des orbites de nombreuses exoplanètes. La distribution des excentricités est donnée à la Figure 1.5 et atteint des valeurs aussi élevées que 0.778 (HD 45350 b) ou même 0.927 (HD 80606 b). Néanmoins, on constate que plus l'excentricité est élevée et moins ces planètes sont nombreuses. Ceci dit, on trouve un important groupe de planètes dont l'excentricité est comprise entre 0.2 et 0.7 et dont l'existence était, jusqu'il y a dix ans, insoupçonnée. Pour comparaison, la planète la plus excentrique du Système Solaire est Mercure d'excentricité $e = 0.206$, les autres planètes ayant une excentricité inférieure à 0.1.

Le diagramme de corrélation entre les périodes de révolution et les excentricités de la Figure

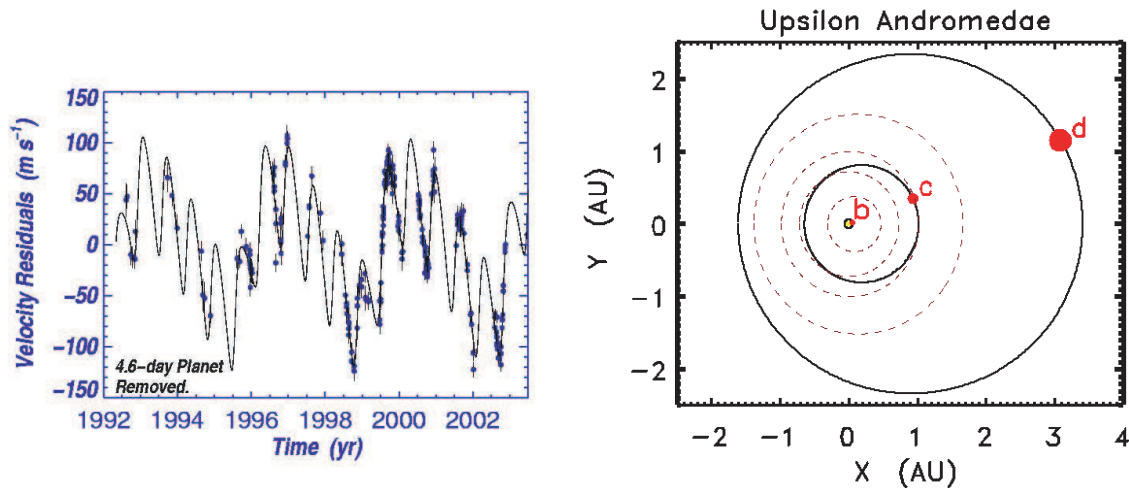


FIG. 1.6: *A gauche* : Variations de la vitesse radiale de l'étoile υ Andromède. *A droite* : Représentation des orbites des trois planètes du système υ Andromède (ellipses en traits pleins) et de celles des planètes telluriques du Système Solaire (ellipses en pointillés). Source : <http://exoplanets.org/esp/upsandb/upsandb.shtml>

1.5 présente également une absence de planètes de courtes périodes et d'excentricités élevées, ce qui revient à dire que les Jupiters chauds sont dotés d'orbites presque circulaires conciliables avec les forces de marées exercées par leur étoile.

Pour mieux visualiser ces nouveaux mondes, la Figure 1.6 (image de droite) compare les orbites de l'exosystème υ Andromède avec celles des planètes telluriques de notre système planétaire. Il s'agit du premier système extrasolaire multiple à avoir été détecté ([Butler et al., 1999]), grâce aux variations de la vitesse radiale de son étoile (cfr Figure 3.5, image de gauche). Il est composé de trois planètes : υ And b, un Jupiter chaud de $0.69M_J$ et d'excentricité 0.029, υ And c de $1.98M_J$ et d'excentricité 0.254, et υ And d de $3.95M_J$ et d'excentricité 0.242. Le système ainsi formé est sensiblement différent de celui des planètes telluriques (orbites en pointillés de la Figure 1.6).

De nombreux mécanismes reliés aux différents scénarios de migration sont à l'étude pour tenter d'expliquer l'origine d'excentricités si élevées. Dans le cas de υ Andromède, une étude récente de [Ford et al., 2005] a montré qu'elles pouvaient provenir de la perturbation gravitationnelle d'une quatrième géante qui aurait été par la suite éjectée du système, laissant les deux planètes extérieures (c et d) dans la configuration actuellement observée.

Au vu des diagrammes précédents, le Système Solaire avec ses planètes de faibles masses, d'orbites quasi-circulaires et dont la distance minimale à l'étoile est de l'ordre d'un tiers d'unité astronomique, semble être une exception. Or il est important de se rappeler que les méthodes actuelles de détection ne permettent ni la détection de planètes de masses terrestres ni celle de géantes de longues périodes et, dans ces conditions, il se peut que notre système planétaire possède une quantité de jumeaux. Ceci dit, les découvertes de ces dernières années provoquent un

bouleversement de notre conception des systèmes planétaires : le Système Solaire ne constitue en rien un modèle général sur lequel seraient calqués les autres systèmes planétaires.

1.4 Les systèmes extrasolaires

Parmi les découvertes actuelles, environ vingt-cinq systèmes planétaires multiples ont été détectés par vitesses radiales (cfr Table 1.1) et leur nombre ne cesse d'augmenter. Pour la plupart, seules deux planètes ont pour l'instant été décelées. La découverte des systèmes extrasolaires a ouvert de nouvelles perspectives de recherche. Quatre grands domaines d'investigation concernant ces systèmes peuvent être identifiés :

- la détection et la détermination orbitale,
- l'évolution à long terme et la stabilité,
- les théories de formation et de migration,
- l'habitabilité de ces nouveaux mondes et la recherche de vie.

C'est dans le cadre du deuxième domaine que s'inscrit notre recherche portant sur la dynamique séculaire des systèmes extrasolaires. D'ores et déjà faisons plus ample connaissance avec les systèmes que nous traiterons dans cette étude.

1.4.1 Classification des systèmes extrasolaires

Nous considérons dans ce travail les systèmes formés de deux planètes en interaction gravitationnelle et dont les éléments orbitaux sont bien déterminés à la date du 01 mai 2007. Ils sont repris à la Table 1.2 et proviennent du catalogue des planètes extrasolaires de Jean Schneider. Nous ne tiendrons pas compte des barres d'erreur sur les différents éléments orbitaux découlant des imprécisions des méthodes de détection, mais il est à noter que celles-ci peuvent être assez importantes. Seul le système ν Andromède est pourvu actuellement de trois planètes, mais l'influence dynamique du Jupiter chaud ν And b est négligeable (e.g. [Stepinski et al., 2000]). Remarquons qu'une nouvelle détermination du système ν Andromède, que nous baptisons ν Andro (c-d) 2006b ([Wittenmyer et al., 2007]), a récemment vu le jour, comme c'est le cas pour beaucoup de systèmes dont les éléments orbitaux évoluent au fil des observations. Afin d'examiner les modifications que produit un changement de paramétrisation, nous donnons également la paramétrisation précédente du système (ν Andro (c-d) 2006a).

Ces treize exosystèmes peuvent être dynamiquement répartis en quatre catégories selon la classification de [Ferraz-Mello et al., 2005a] opérée en fonction du rapport des périodes :

- Classe Ia (rapport des périodes typique de 2 ou 3) : caractérisée par des planètes de masses et d'excentricités élevées et dont les orbites sont si proches que seule une *résonance en moyen mouvement* (c'est-à-dire une résonance entraînée par une commensurabilité des périodes orbitales des planètes) permet de maintenir la stabilité du système,
- Classe Ib (rapport des périodes < 3) : caractérisée par des planètes de faibles excentricités et souvent proches d'une résonance en moyen mouvement. Le système Jupiter-Saturne est un exemple typique de cette catégorie de systèmes,

TAB. 1.2: Eléments orbitaux osculateurs des différents systèmes extrasolaires considérés dans cette étude et provenant de “L’encyclopédie des planètes extrasolaires” de Jean Schneider accessible à l’adresse internet <http://exoplanet.eu/>, à la date du 01 mai 2007. Les masses sont déterminées à un facteur $\sin i$ près.

	a_1 (UA)	a_2 (UA)	e_1	e_2	ϖ_1 (deg)	ϖ_2 (deg)	m_1 (M_J)	m_2 (M_J)
ν Andro (c-d) 2006a	0.829	2.53	0.28	0.27	250	260	1.89	3.75
ν Andro (c-d) 2006b	0.83	2.51	0.254	0.242	232.4	258.5	1.98	3.95
HD 217107	0.073	4.41	0.132	0.537	22.7	164	1.33	2.5
HD 38529	0.129	3.68	0.29	0.36	87.7	14.7	0.78	12.7
HD 190360	0.128	3.92	0.01	0.36	153.7	153.7	0.057	1.502
HD 74156	0.294	3.4	0.636	0.583	181.5	242.4	1.86	6.17
HD 168443	0.3	3.91	0.5286	0.2125	172.87	65.07	8.02	18.1
HD 73526	0.66	1.05	0.19	0.14	203	13	2.9	2.5
HD 169830	0.81	3.6	0.31	0.33	148	252	2.88	4.04
HD 202206	0.83	2.55	0.435	0.267	161.18	78.99	17.4	2.44
HD 12661	0.83	2.56	0.35	0.2	291.73	162.4	2.3	1.57
HD 108874	1.051	2.68	0.07	0.25	248.4	17.3	1.36	1.018
HD 128311	1.099	1.76	0.25	0.17	110.9	195.5	2.18	3.21
47 Uma	2.11	7.73	0.049	0.	111	127	2.6	1.34

- Classe II (rapport des périodes entre 5 et 15) : caractérisée par d’importantes interactions dynamiques séculaires entre les planètes d’un même système,
- Classe III (rapport des périodes > 30) : caractérisée par de faibles interactions dynamiques séculaires entre les planètes d’un même système.

Les planètes de la dernière classe sont également appelées *planètes hiérarchiques*.

En appliquant cette classification aux exosystèmes de la Table 1.2, on trouve que les planètes HD 73526 et HD 128311 (de rapports de périodes 2.006 et 2.05) sont en résonance 2/1 et se situent donc dans la première catégorie. Il est à noter que, parmi les systèmes de plus de deux planètes, l’existence d’une résonance en moyen mouvement entre deux planètes est assez fréquente (par exemple Gl 876 (c-b), 55 Cnc (b-c)). Pour le moment, seuls deux exosystèmes sont susceptibles de faire partie de la classe Ib : 47Uma³ (2.4) et le système des planètes b-c autour du pulsar PSR 1257+12 (1.48). Toujours selon cette répartition, la classe II contient, quant à elle, les exosystèmes HD 108874 (4.1), ν Adromède (5.3), HD 202206 (5.4), HD 12661 (5.5) et HD 169830 (9.3). Enfin, les autres exosystèmes de la Table 1.2 sont des systèmes hiérarchiques dont le rapport des périodes est compris entre 30.4 (HD 168443) et 470.3 (HD 217107).

La découverte des systèmes extrasolaires a doté l’étude du *problème des trois corps* d’un

³si l’ambiguïté sur l’excentricité de la planète 47 Uma c peut être levée

nouveau cadre d'application. Beaucoup de techniques et de modèles initialement conçus pour l'analyse du Système Solaire doivent être modifiés afin de pouvoir être appliqués à ces nouveaux mondes de caractéristiques très différentes comme l'a montré la section précédente. Les inclinaisons des planètes étant actuellement indéterminées, la plupart des études considèrent les systèmes précédents comme coplanaires. Sauf mention explicite, les études décrites ci-après sont opérées dans le cadre du problème des trois corps coplanaire dont l'inclinaison du plan orbital commun par rapport au plan du ciel est fixée à 90° .

Les systèmes de la première classe ont, dès les premières découvertes, suscité un vif intérêt, et particulièrement l'analyse du rôle des résonances en moyen mouvement dans l'origine et la stabilité des configurations observées. En effet, les premières simulations numériques du système Gl 876 (c-b) indiquent qu'il se trouve en résonance 2/1, présentant une libration simultanée des angles résonants autour d'un alignement des demi-grands axes ("apsidal corotations"). Plus concrètement, nous parlerons dans la suite d'*alignement ou anti-alignement des lignes des apsides*, la ligne des apsides étant la droite reliant l'apocentre au péricentre (cfr Annexe B). Suite à cette observation, de nombreuses études se sont focalisées sur la recherche de solutions stationnaires pour le système résonant moyenné par rapport aux courtes périodes et les découvertes de solutions supplémentaires se sont succédées au fil des publications.

Deux premiers types de solutions ont été découverts numériquement par [Lee et Peale, 2002] et [Hadjidemetriou, 2002] : un premier caractérisé par une valeur nulle de l'angle résonant de la planète intérieure $\theta_1 = 0^\circ$ et par l'alignement des lignes des apsides $\Delta\varpi = 0^\circ$ (cas de Gl 876 (c-b)), et un second caractérisé par $(\theta_1, \Delta\varpi) = (0, \pi)$ (cas du système Io-Europe) et par de plus faibles excentricités. Des résultats complémentaires ont été avancés par [Beaugé et al., 2003b] grâce à une approche analytique (basée sur le développement de l'Hamiltonien résonant introduit dans [Beaugé et Michtchenko, 2003a] et limité à des excentricités inférieures à 0.5), notamment la découverte d'un troisième type de solutions pour lequel les angles θ_1 et $\Delta\varpi$ sont fixés à des valeurs différentes de 0 et π . Ces solutions sont dites asymétriques. Enfin, [Ji et al., 2003] et [Hadjidemetriou et Psychoyos, 2003] ont mis en évidence numériquement un dernier type de solutions de l'Hamiltonien résonant moyenné, à plus hautes excentricités et tel que $(\theta_1, \Delta\varpi) = (\pi, \pi)$. Une synthèse des différentes solutions, de leur stabilité et de leur localisation dans l'espace (e_1, e_2) pour différents rapports de masses peut être trouvée dans [Beaugé et al., 2006] (résonance 2/1) et [Michtchenko et al., 2006a] (résonances 3/2, 3/1, 4/1, 5/1 et 5/2) ou dans [Hadjidemetriou, 2006].

En outre, [Lee et Peale, 2002] et [Beaugé et al., 2006] ont montré numériquement qu'une migration interne de la planète extérieure (due par exemple à l'interaction de la planète avec un disque) peut induire une capture en résonance en moyen mouvement qui expliquerait la proximité des systèmes découverts aux familles de solutions stationnaires du problème moyenné ainsi que les excentricités élevées des planètes de ces systèmes. Plus particulièrement, depuis une orbite initiale quasi-circulaire, le système, durant le processus de capture, évoluerait adiabatiquement le long de familles d'équilibres symétriques, anti-symétriques et/ou asymétriques jus-

qu'à leur situation actuelle. Cependant, certaines configurations symétriques, anti-symétriques et asymétriques ne peuvent être atteintes par ce scénario, au départ d'orbites quasi-circulaires, et, pour y remédier, [Lee, 2004] propose certains mécanismes basés sur un changement du rapport des masses en cours de migration.

Il est également à noter que beaucoup d'études numériques portent sur l'exosystème de la classe Ia, HD 82943, proche de la résonance 2/1 mais dont la paramétrisation obtenue par [Mayor et al., 2004] correspondait à celle d'un système instable. [Ferraz-Mello et al., 2005b] et [Lee et al., 2006], entre autres, ont montré que les observations sont compatibles avec d'autres paramétrisations qui assurent la stabilité à long terme du système en résonance 2/1, notamment par une certaine proximité aux solutions stationnaires $(\theta_1, \Delta\varpi) = (0, 0)$. Ceci montre que la détermination des éléments orbitaux depuis les observations par vitesses radiales n'est pas chose facile et est, pour le moment, entachée d'indéterminations. Ainsi, un des avantages des théories (semi-)analytiques est de permettre une étude paramétrique du problème et d'ainsi pouvoir aiguiller les déterminations des paramètres.

Un bel exemple de collaboration possible entre détermination orbitale et étude de la dynamique à long terme d'un système planétaire est donné par [Correia et al., 2005]. En effet, l'ensemble des paramètres du système HD 202206 dérivé depuis les observations par vitesses radiales est insatisfaisant dans le sens où le système ainsi déterminé devient instable en quelques milliers d'années. Ce même article opère alors une recherche des zones de stabilité dans le voisinage proche de cet ensemble de paramètres et découvre une région stable de conditions initiales liées à la résonance 5/1. Même si l'ajustement théorique de ces nouvelles conditions initiales avec les mesures de vitesses radiales est légèrement moins précis, cette nouvelle solution est certainement plus représentative du comportement réel du système.

Concernant les systèmes de la classe Ib, la dynamique à long terme des planètes b-c de faibles excentricités ($e_1 = 0.019$ et $e_2 = 0.025$) autour du pulsar PSR 1257+12 est influencée par leur proximité à la résonance 3/2. Parmi les différentes études portant sur ce système, citons celle de [Callegari et al., 2006] qui a analysé sa dynamique grâce à une approche analytique similaire à celle utilisée par [Michtchenko et Ferraz-Mello, 2001] pour le système Jupiter-Saturne proche de la résonance 5/2. Elle est basée sur un développement en excentricités de l'Hamiltonien coplanaire moyenné par rapport aux courtes périodes et limité au second ordre en excentricités, appelé développement de Laplace-Lagrange (cfr Section 2.2).

Enfin, un autre genre d'analyse numérique de la stabilité à long terme plus en lien avec la recherche de vie peut également être mentionné : celle d'une planète fictive de masse terrestre dans la zone habitable de systèmes formés de deux planètes géantes ([Érdi et al., 2004]) ou encore celle d'une planète fictive de masse terrestre en mouvement co-orbital avec une planète géante qui se situe dans la zone habitable du système ([Érdi et Sándor, 2005]). Dans le même esprit, [Sándor et al., 2007] ont réalisé un catalogue de cartes de stabilité dynamique de systèmes planétaires composés d'une seule planète géante et d'une planète fictive de masse ter-

restre, l'objectif étant d'analyser la stabilité de la zone habitable des exosystèmes actuellement découverts formés d'une seule planète géante.

Les travaux que nous avons évoqués au cours de cette section ne constituent pas une liste exhaustive des études portant sur l'évolution à long terme et la stabilité des systèmes extrasolaires à proximité de résonances en moyen mouvement. Notre but est de donner une idée générale des voies principales empruntées par les dynamiciens et de souligner la prédominance des travaux numériques sur les approches analytiques.

Comme nous le verrons dans la section suivante, l'étude de la dynamique séculaire non-résonante n'a pas connu la même effervescence et peu de recherches s'inscrivent dans ce domaine. C'est une des raisons qui nous ont poussés à investiguer plus en profondeur le comportement des systèmes des classes II et III. Ainsi nous nous proposons, dans ce travail, d'étudier, par une méthode analytique, la dynamique séculaire des systèmes formés de deux planètes hors résonance en moyen mouvement. Afin de mieux situer les tenants et les aboutissants de l'analyse que nous désirons entreprendre, la section suivante effectue un tour d'horizon des études menées au préalable sur la dynamique séculaire des systèmes extrasolaires non-résonants.

1.4.2 Littérature existante portant sur la dynamique séculaire non-résonante des systèmes extrasolaires

Les premières études numériques ont montré que les interactions séculaires entre deux planètes d'un même système supposé coplanaire et hors résonance en moyen mouvement peuvent produire des effets dynamiques intéressants. En effet, le premier système à avoir été détecté, ν Andromède, est doté d'un comportement séculaire intrigant : les amplitudes des variations des excentricités sont considérables et les lignes des apsides sont presque alignées (c'est-à-dire $\Delta\varpi$ est en libration autour de 0°). Les modèles analytiques basés sur la théorie séculaire de Laplace-Lagrange et utilisés généralement dans l'étude de la dynamique séculaire du problème des trois corps sont mis à mal par de telles valeurs élevées des excentricités. Par conséquent, les études portant sur la dynamique séculaire non-résonante sont principalement des travaux purement numériques ("n-body codes").

Les objectifs des études numériques sont divers. Citons, par exemple, [Chiang et al., 2001] et [Lissauer et Rivera, 2001] qui ont étudié l'influence de l'inclinaison mutuelle des orbites du système ν Andromède sur la configuration apsidale et la stabilité à long terme du système. Ainsi, l'alignement ou anti-alignement des lignes des apsides des deux planètes favorise la stabilité à long terme du système. De même, l'existence d'un alignement ou d'un anti-alignement des lignes des apsides dans les autres systèmes non-résonants a été vérifiée entre autres par [Ji et al., 2003]. Enfin, quelques travaux exposent des mécanismes possibles de formation de ces systèmes expliquant les configurations apsidales particulières et les variations importantes des excentricités, entre autres [Chiang et Murray, 2002] (interaction avec un disque gazeux) ou [Malhotra, 2002] et [Ford et al., 2005] (interaction gravitationnelle entre planètes) dans le cas

du système v Andromède.

Bien que l'origine, l'évolution et la stabilité des configurations orbitales des systèmes planétaires multiples peuvent être généralement bien analysées par intégration numérique des équations newtoniennes du mouvement, l'interprétation de la dynamique du problème nécessite souvent la mise en oeuvre d'approximations analytiques. Ces dernières ont l'avantage bien souvent de ne pas se limiter à une seule paramétrisation du problème mais de permettre une exploration de l'espace des paramètres, et ce dans un temps beaucoup plus restreint que celui nécessité par les intégrations numériques. Néanmoins, les approximations théoriques ne sont généralement pas valables dans l'espace des paramètres tout entier et il s'agit de rester attentifs aux limitations intrinsèques des modèles analytiques considérés. En outre, les études analytiques de la dynamique séculaire des problèmes planétaires comprennent une moyennisation par rapport aux termes dépendant des longitudes moyennes des planètes et, par là-même, éliminent les effets (de courtes périodes dans le cas d'un système hors résonance) produits par les résonances en moyen mouvement qui sont à proximité ainsi que le développement possible d'instabilités.

Rappelons que l'approche analytique coplanaire de Laplace-Lagrange, classiquement utilisée dans le Système Solaire où les excentricités sont faibles, contient deux équilibres du problème moyenné par rapport aux courtes périodes et réduit, grâce à l'invariance du moment angulaire total (cfr Section 2.1), à un degré de liberté (ou de façon équivalente deux solutions périodiques du problème non-moyenné) : une correspondant à l'alignement des lignes des apsides ($\Delta\varpi = 0^\circ$) et l'autre à l'anti-alignement de ces mêmes lignes ($\Delta\varpi = 180^\circ$). Il est naturel de chercher à savoir ce qu'il advient de ces solutions dans le cas de planètes d'excentricités plus importantes.

En ce qui concerne les études analytiques ou semi-analytiques, trois travaux ont particulièrement retenu notre attention. L'approche analytique de [Lee et Peale, 2003] est centrée sur un développement de la perturbation hamiltonienne en fonction du rapport des demi-grands axes α limité à l'ordre 3 et moyenné par rapport aux courtes périodes ("octupole-level secular theory"). Cette approximation est valable uniquement dans le cas des systèmes hiérarchiques regroupés dans la classe III mais ne contient aucune limitation quant aux valeurs des excentricités. Cette approche analytique du problème ainsi réduit à un degré de liberté est appliquée à deux systèmes extrasolaires supposés coplanaires ($i_1 = i_2 = 90^\circ$) : HD 168443 ($\alpha = 0.1$) et HD 12661 ($\alpha = 0.32$). L'étude du premier cas est marquée par la découverte, dans le cas d'excentricités élevées, de deux équilibres supplémentaires du problème à un degré de liberté, correspondant à $\Delta\varpi = 0^\circ$. La dynamique du système HD 12661 est, quant à elle, non seulement influencée par une certaine proximité à la résonance 11/2 mais également dotée d'un rapport de demi-grands axes trop élevé pour pouvoir être quantitativement décrite par l'approximation limitée au troisième ordre en α .

Une étude semi-analytique du même problème a été entreprise dans le même temps par [Michtchenko et Malhotra, 2004]. Elle est basée sur une moyennisation numérique des inter-

actions gravitationnelles de courtes périodes et une réduction du problème à traiter à un seul degré de liberté. Cette approche dépend de seulement deux paramètres : le rapport des demi-grands axes et celui des masses. La localisation des points fixes du problème est obtenue par une méthode géométrique utilisant les constantes du mouvement (énergie et moment angulaire total). L'existence d'une zone de résonance séculaire non-linéaire à hautes excentricités (liée aux équilibres supplémentaires découverts simultanément par [Lee et Peale, 2003]) est ainsi mise en évidence. Cette étude est appliquée au système ν Andromède supposé coplanaire, ainsi qu'à différentes valeurs des paramètres de ce système.

Enfin, la généralisation au problème non-coplanaire des trois corps est traitée par la même équipe dans [Michtchenko et al., 2006b]. Après une moyennisation numérique au premier ordre des masses, une réduction de l'Hamiltonien à deux degrés de liberté est obtenue grâce à l'élimination des noeuds de Jacobi. Dans le cas du système ν Andromède, l'étude d'un plan représentatif de la dynamique contenant les courbes d'Hamiltonien constant et interprété à l'aide d'intégrations numériques des équations du mouvement, permet de mettre en évidence différents types de comportement basés sur une libration ou une circulation des angles ω_1 , ω_2 et $\Delta\varpi$, dont en particulier, à hautes inclinaisons mutuelles des orbites, une libration de ω_1 apparentée à la résonance de Kozai présente dans le problème restreint des trois corps.

1.5 Plan de thèse

Dans l'optique d'étudier la dynamique séculaire des systèmes extrasolaires non-résonants, l'objectif de ce travail est de généraliser la théorie séculaire classique de Laplace-Lagrange en poussant le développement de la perturbation à un ordre supérieur en excentricités et en inclinaisons. Il est légitime de se demander si une telle approche analytique reproduit avec précision la dynamique séculaire de systèmes formés de deux planètes présentant des excentricités aussi élevées que celles des systèmes extrasolaires de la Table 1.2. Pour ce faire, la formulation hamiltonienne de ce problème des trois corps, le développement en excentricités et en inclinaisons de cette dernière ainsi que les concepts fondamentaux de la théorie des perturbations sont rappelés au Chapitre 2.

L'inclinaison mutuelle des plans orbitaux de deux planètes d'un même exosystème étant pour le moment indéterminée, nous considérons, dans un premier temps, le problème des trois corps coplanaire. Une réduction de l'Hamiltonien à seulement un degré de liberté (consécutive à une moyennisation par rapport aux courtes périodes et grâce à la constance du moment angulaire total) permet, au Chapitre 3, de représenter aisément l'espace de phase du problème réduit, témoin privilégié de la dynamique de ce problème et de la stabilité de ses équilibres. Le Chapitre 4 s'essaie, quant à lui, au calcul des fréquences du problème séculaire. Ces dernières permettent la reproduction des évolutions temporelles des systèmes extrasolaires supposés coplanaires, et ce par un développement totalement analytique basé sur les transformations de Lie.

Comme nous l'avons dit, seule est envisagée la dynamique séculaire des systèmes dont les

périodes orbitales ne sont pas commensurables. La vérification de la proximité des systèmes de la Table 1.2 à une quelconque résonance en moyen mouvement est effectuée au Chapitre 5, grâce à une méthode de perturbation par transformées de Lie au premier ordre des masses. Cela nous permet d'affiner la classe II de [Ferraz-Mello et al., 2005a] en identifiant les exosystèmes supposés coplanaires pouvant être traités par notre approche séculaire, et ce malgré une certaine proximité à une quelconque résonance en moyen mouvement.

Même si la résolution spatiale des systèmes extrasolaires est impossible pour l'instant, il peut s'avérer utile d'étudier la dynamique séculaire des systèmes planétaires non-résonants dont les orbites sont non-coplanaires. Ce problème tridimensionnel peut être réduit à deux degrés de liberté grâce à une moyennisation par rapport aux courtes périodes et à la réduction de Jacobi. Le Chapitre 6 est consacré à l'étude des équilibres de ce problème et à leurs implications sur la structure de l'espace de phase.

Enfin, le Chapitre 7 s'applique à l'identification des principales fréquences du problème séculaire influençant l'évolution à long terme d'un système tridimensionnel, tant dans un repère général que dans le repère lié au plan de Laplace. Une attention particulière est également accordée aux conséquences d'une possible inclinaison mutuelle non-nulle des deux plans orbitaux du système ν Andromède sur la dynamique séculaire de ce système.

Chapitre 2

Le problème des trois corps

L'image de deux orbites elliptiques fixes dans l'espace, que nous fournit le *problème des deux corps* célestes (cfr Annexe B), est uniquement valable lorsque seuls ces deux corps sont en interaction gravitationnelle. Mais c'est sans compter les perturbations des autres corps célestes qui les entourent, perturbations qui induisent à long terme des changements dans la forme et l'orientation de ces ellipses. C'est le cas pour le *problème des trois corps planétaire* où la masse d'un des corps (*l'étoile*) est nettement supérieure à celles des deux autres corps (*les planètes*). Il s'agit alors de modéliser les interactions des planètes avec le corps central sans perdre de vue les interactions entre les planètes elles-mêmes.

La Section 2.1 introduit la formulation hamiltonienne classique du problème des trois corps considéré dans le repère de Jacobi. Cette formulation est limitée au second degré des masses, approximation suffisamment précise dans le cadre du problème planétaire. De plus, nous choisissons de développer l'Hamiltonien en excentricités et en inclinaisons. Les étapes principales du développement sont reprises à la Section 2.2.

Nous obtenons ainsi une expression de l'Hamiltonien sous forme de deux problèmes de deux corps perturbés, propice à la mise en place d'une théorie des perturbations. Le principe général des perturbations par transformées de Lie ainsi qu'un algorithme de calcul simple et systématique sont explicités à la Section 2.3.

Enfin, nous présentons, à la dernière section, le manipulateur de séries symbolique MSNam, développé au sein de notre université et à l'aide duquel sont réalisés les calculs symboliques nécessités par ce travail.

2.1 Formulation hamiltonienne du problème des trois corps

Considérons le système formé par une étoile de masse m_0 et deux planètes de masses m_1 et m_2 supposées petites par rapport à la masse du corps central. Nous adoptons dans la suite la convention selon laquelle l'indice 1 (resp. 2) fait référence à la planète la plus proche (resp. éloignée) du corps central. Nous devons modéliser les interactions des planètes avec le corps

central mais également les interactions entre les planètes elles-mêmes.

Ce problème est un cas particulier du problème des n corps (corps central de masse m_0 et $n - 1$ planètes de masses m_1, m_2, \dots, m_{n-1} en interaction gravitationnelle) dont les équations du mouvement, dans un repère *barycentrique*, c'est-à-dire dont l'origine est le centre de masse des n corps, sont :

$$\frac{d^2 \vec{u}_i}{dt^2} = -G \sum_{j \neq i} m_j \frac{\vec{u}_i - \vec{u}_j}{\|\vec{u}_i - \vec{u}_j\|^3} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \quad (2.1)$$

Ce système différentiel d'ordre $6n$ n'est autre que la traduction de la seconde loi de Newton.

Le problème des n corps possède deux symétries qui se traduisent en formalisme hamiltonien par l'existence de cinq intégrales premières. En effet, le problème est invariant tant par translation dans l'espace \mathbb{R}^3 que par rotation dans ce même espace. L'*invariance par translation* revient à considérer l'invariance du centre de masse du système. Le mouvement de ce dernier est rectiligne et uniforme dans tout repère galiléen. En termes de coordonnées barycentriques, cela mène aux six relations suivantes :

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i \vec{u}_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n-1} m_i \frac{d\vec{u}_i}{dt} = 0. \quad (2.2)$$

Cette réduction peut être facilement réalisée par un passage aux coordonnées héliocentriques ou jacobiniennes. L'*invariance par rotation* est, quant à elle, liée à celle du moment cinétique total (ou *moment angulaire total*) en norme et en direction, et permet de réduire le problème de deux degrés de liberté supplémentaires. Dans le cas particulier du problème des trois corps, cette réduction est connue sous le nom d'élimination des noeuds ou réduction de Jacobi (cfr Section 6.1.1).

Ainsi l'étude du problème des n corps peut se réduire à un système d'ordre $6n - 10$ et l'Hamiltonien correspondant possède alors $3n - 5$ degrés de liberté. Dans le cas du problème des deux corps (cfr Annexe B), l'Hamiltonien est intégrable puisqu'il peut se réduire à un problème d'un seul degré de liberté, ce qui n'est plus le cas lorsque le nombre de corps est supérieur à deux. La recherche de la solution exacte n'a dès lors plus de sens et une approximation de la solution peut être obtenue grâce à la théorie des perturbations (cfr Section 2.3).

Afin d'effectuer la réduction du centre de masse au problème des trois corps, nous choisissons d'exprimer l'Hamiltonien correspondant au système différentiel (2.1) dans les *coordonnées de Jacobi*. Le principe de ces coordonnées consiste à repérer chaque corps P_i par rapport au barycentre (G_{i-1} à la Figure 2.1) des i corps P_0, \dots, P_{i-1} précédents. Si l'on nomme $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ les coordonnées respectives du corps central et des deux planètes dans un repère barycentrique, les coordonnées de Jacobi pour la première composante s'écrivent :

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 - \xi_0 \\ x_2 &= \xi_2 - \xi_0 - \kappa_1(\xi_1 - \xi_0), \end{aligned} \quad (2.3)$$

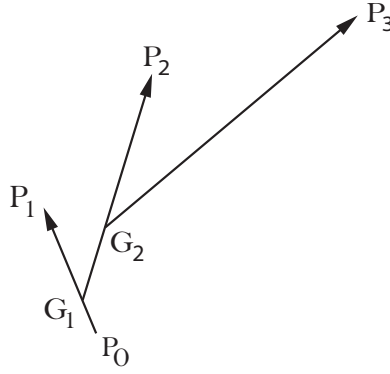


FIG. 2.1: Coordonnées de Jacobi

où $\kappa_1 = \frac{m_1}{m_0+m_1}$. On peut faire de même pour les composantes y_i et z_i . Dans la suite, la notation \vec{r}_i désignera le vecteur position de la planète m_i considéré dans un repère jacobien.

Dans ces nouvelles coordonnées, l'Hamiltonien du problème des trois corps limité au second degré des masses s'écrit

$$\mathcal{H} = -\frac{Gm_0m_1}{2a_1} - \frac{Gm_0m_2}{2a_2} - Gm_1m_2 \left[\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} - \frac{(\vec{r}_1|\vec{r}_2)}{r_2^3} \right]. \quad (2.4)$$

Les deux premiers termes de cette expression ne sont rien d'autre que les Hamiltoniens de problèmes de deux corps modélisant les interactions entre la planète m_i et le corps central m_0 . Le dernier terme représente la *perturbation* de ces problèmes de deux corps induite par les interactions des planètes entre elles ; il est lui-même composé d'un premier terme, appelé *partie directe* correspondant à l'inverse de la distance entre les deux planètes et d'un second plus complexe dénommé *partie indirecte*. Nous renvoyons à l'Annexe C pour le détail des calculs menant à une telle formulation.

Il est important d'insister sur le fait que la formulation (2.4) n'est pas une expression exacte mais seulement une approximation de l'Hamiltonien du problème des trois corps limitée au second degré des masses. Cette dernière convient au cas planétaire du problème des trois corps vu la petitesse des masses des planètes par rapport à celle de l'étoile. De plus, il est à noter que, à cet ordre en masses, les repères barycentrique et jacobien se confondent, le barycentre du système se situant dans cette approximation à l'emplacement du corps central.

2.2 Développement de la perturbation en excentricités et en inclinaisons

Le développement de la perturbation de l'Hamiltonien (2.4) est abondamment traité dans la littérature, surtout depuis l'avènement du calcul symbolique sur ordinateur. Il existe principalement deux types de développement : un développement en éléments orbitaux (excentricités et inclinaisons) utilisant les coefficients de Laplace dont l'avantage est de ne dépendre que du rapport des demi-grands axes et d'ainsi mener à une formulation compacte de l'Hamiltonien (e.g.

[Le Verrier, 1855], [Brouwer et Clemence, 1961], [Laskar et Robutel, 1995], [Ellis et Murray, 2000]), et un développement basé sur les polynômes de Legendre (e.g. [Kaula, 1962]) permettant de ne considérer que le développement des termes associés à l'argument qui nous intéresse mais menant à une formulation moins compacte.

Nous choisissons de développer la perturbation de l'Hamiltonien (2.4) en série des excentricités et des inclinaisons. Limité au second ordre en excentricités et inclinaisons, ce développement est nommé *théorie de Laplace-Lagrange* et convient pour la description de l'évolution des planètes du Système Solaire mais, comme nous le verrons, est inadapté aux systèmes extrasolaires de plus grandes excentricités. Augmenter l'ordre du développement pour tester son applicabilité aux exosystèmes découverts, tel est l'objectif de ce travail. En pratique, ces développements sont réalisés avec notre manipulateur de séries MSNam (cfr Section 2.4) et sont basés sur l'algorithme de [Abu-el-Ata et Chapront, 1975] dont nous décrivons les principales étapes dans cette section.

Les vecteurs \vec{r}_1 et \vec{r}_2 de l'expression (2.4) peuvent être exprimés en fonction des *éléments orbitaux* $(a, e, i, \omega, \Omega, f)$ décrits à l'Annexe B :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos f \\ r \sin f \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

En exprimant la relation précédente en fonction du rapport $\frac{i}{2}$, au lieu de l'inclinaison elle-même, nous obtenons

$$\begin{cases} x_1 = r_1 [\cos(f_1 + \omega_1 + \Omega_1) + 2 \sin^2 \frac{i_1}{2} \sin(f_1 + \omega_1) \sin \Omega_1] \\ y_1 = r_1 [\sin(f_1 + \omega_1 + \Omega_1) - 2 \sin^2 \frac{i_1}{2} \sin(f_1 + \omega_1) \cos \Omega_1] \\ z_1 = r_1 [2 \sin \frac{i_1}{2} \cos \frac{i_1}{2} \sin(f_1 + \omega_1)] \end{cases} \quad (2.6)$$

et identiquement pour la seconde planète. L'interprétation de ces équations dans le cas d'un système coplanaire est aisée puisque les équations se limitent alors à

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos(f_1 + \omega_1 + \Omega_1), & x_2 &= r_2 \cos(f_2 + \omega_2 + \Omega_2) \\ y_1 &= r_1 \sin(f_1 + \omega_1 + \Omega_1), & y_2 &= r_2 \sin(f_2 + \omega_2 + \Omega_2). \end{aligned} \quad (2.7)$$

L'angle $\omega_i + \Omega_i$ donnant la position du péricentre et l'anomalie vraie f_i étant l'angle compris entre le péricentre et la planète m_i , sommer ces deux angles correspond donc bien à repérer la planète dans le plan commun du mouvement.

Par définition de la longitude moyenne λ_i (cfr Annexe B), l'angle $f_i + \omega_i + \Omega_i$ est équivalent à l'angle $\lambda_i + f_i - l_i$. Nous souhaitons exprimer les normes r_i et les anomalies vraies f_i en fonction des demi-grands axes et des excentricités. Pour ce faire, nous pouvons utiliser les

développements en série classiques suivants :

$$\begin{aligned}
 \cos(f-l) &= 1 - e^2 + \frac{7e^2}{64} + \dots - e\left[\frac{5e^2}{4} - \frac{51e^4}{144} + \dots\right] \cos l \\
 &\quad + e^2\left[1 - \frac{15e^2}{9} \dots\right] \cos 2l + e^3\left[\frac{5}{4} - \frac{37e^2}{16} + \dots\right] \cos 3l + \dots \\
 \sin(f-l) &= e\left[2 - \frac{5e^2}{4} + \frac{51e^4}{144} + \dots\right] \sin l \\
 &\quad + e^2\left[\frac{5}{4} - \frac{41e^2}{24} + \dots\right] \sin 2l + e^3\left[\frac{51}{36} - \frac{339e^2}{144} + \dots\right] \sin 3l + \dots \\
 \frac{r}{a} &= 1 + \frac{e^2}{2} + \dots - e\left[1 - \frac{3e^2}{8} + \frac{5e^4}{192} + \dots\right] \cos l \\
 &\quad - e^2\left[\frac{1}{2} - \frac{e^2}{3} + \dots\right] \cos 2l - e^3\left[\frac{3}{8} - \frac{45e^2}{188} + \dots\right] \cos 3l + \dots
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ces développements présentent la *caractéristique de d'Alembert* dans les couples (e_1, l_1) et (e_2, l_2) , c'est-à-dire que le coefficient de $\cos jl$ a pour facteurs e^j et une série en e^2 . En d'autres mots, pour chaque terme, l'exposant de e est au moins égal au multiple de l et de même parité.

Un fastidieux calcul nous permet de trouver le produit scalaire des vecteurs de position \vec{r}_i :

$$(\vec{r}_1 | \vec{r}_2) = r_1 r_2 \begin{cases} \cos S \\ -\sin^2 \frac{i_1}{2} [\cos S - \cos^2 \frac{i_2}{2} \cos(S - 2f_1 - 2\omega_1)] \\ -\sin^2 \frac{i_2}{2} [\cos S - \cos^2 \frac{i_1}{2} \cos(S + 2f_2 + 2\omega_2)] \\ +2 \sin \frac{i_1}{2} \cos \frac{i_1}{2} \sin \frac{i_2}{2} \cos \frac{i_2}{2} [\cos(f_1 + \omega_1 - f_2 - \omega_2) \\ \quad - \cos(f_1 + \omega_1 + f_2 + \omega_2)] \\ +\sin^2 \frac{i_1}{2} \sin^2 \frac{i_2}{2} [\cos S + \cos(S - 2f_1 - 2\omega_1 + 2f_2 + 2\omega_2)], \end{cases} \tag{2.9}$$

où $S = f_1 + \omega_1 + \Omega_1 - f_2 - \omega_2 - \Omega_2$. Cette expression peut être convertie en une série dépendant uniquement de " $\sin \frac{i}{2}$ " grâce à un développement de Taylor des quantités " $\cos \frac{i}{2}$ ". L'expression obtenue est paire en $\sin \frac{i_1}{2}$ et $\sin \frac{i_2}{2}$. De plus, ce produit scalaire présente la caractéristique de d'Alembert dans les couples $(\sin \frac{i_1}{2}, f_1 + \omega_1)$ et $(\sin \frac{i_2}{2}, f_2 + \omega_2)$. D'un point de vue pratique, les développements en excentricités et en inclinaisons explicités ci-dessus seront poussés à un ordre fixé qui conditionnera les valeurs maximales des excentricités et des inclinaisons pouvant être traitées par notre approche.

A l'aide des développements (2.8), nous obtenons pour la partie indirecte :

$$\begin{aligned}
 \frac{(\vec{r}_1 | \vec{r}_2)}{r_2^3} &= \frac{a_1}{a_2^2} \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \\
 &\quad + \frac{a_1}{a_2^2} F_1\left(\sin \frac{i_1}{2}, \sin \frac{i_2}{2}, e_1, e_2, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 - \Omega_1, \lambda_2 - \Omega_2, \lambda_1 - \varpi_1, \lambda_2 - \varpi_2\right),
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

où $\varpi_i = \omega_i + \Omega_i$ et où le premier terme correspond à une inclinaison et une excentricité nulles, auquel cas l'anomalie vraie f_i est égale à l'anomalie moyenne l_i et le rayon est de la même longueur que le demi-grand axe (puisque une excentricité nulle correspond à une orbite circulaire). Le second terme, quant à lui, est de l'ordre de $e_1, e_2, \sin \frac{i_1}{2}$ ou $\sin \frac{i_2}{2}$.

De même, nous calculons la distance entre les deux planètes :

$$\begin{aligned}
 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 &= r_1^2 + r_2^2 - 2(\vec{r}_1 | \vec{r}_2) \\
 &= a_2^2 \left[1 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 - 2\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \right] + a_2^2 F_2,
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

où

$$\begin{aligned} a_2^2 F_2 &= a_1^2 G_1(e_1, \lambda_1 - \varpi_1) + a_2^2 G_2(e_2, \lambda_2 - \varpi_2) \\ &+ a_1 a_2 G_3\left(\sin \frac{i_1}{2}, \sin \frac{i_2}{2}, e_1, e_2, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 - \Omega_1, \lambda_2 - \Omega_2, \lambda_1 - \varpi_1, \lambda_2 - \varpi_2\right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Les fonctions F_1, G_1, G_2 et G_3 présentent la caractéristique de d'Alembert dans les couples $(\sin \frac{i_1}{2}, \lambda_1 - \Omega_1)$, $(\sin \frac{i_2}{2}, \lambda_2 - \Omega_2)$, $(e_1, \lambda_1 - \varpi_1)$ et $(e_2, \lambda_2 - \varpi_2)$.

Par un développement de Taylor de l'expression, nous obtenons

$$\frac{a_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = D + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} F_2^n D^{2n+1}, \quad (2.13)$$

$$\text{où } D = \left[1 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 - 2\left(\frac{a_1}{a_2}\right) \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \right]^{-1/2}.$$

Un développement en série de Fourier de D^{2n+1} donne le résultat suivant :

$$D^{2n+1} = \sum_{k \geq 0} B_k^{(2n+1)/2} \cos k(\lambda_1 - \lambda_2), \quad (2.14)$$

où les coefficients $B_k^{(2n+1)/2}$, dépendant uniquement du rapport des demi-grands axes, sont appelés *coefficients de Laplace* et sont les fonctions hypergéométriques :

$$B_k^{(2n+1)/2} = 2 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^k \frac{(2k+2n-1)!!}{(2k)!!(2n-1)!!} F\left(\frac{2n+1}{2}, \frac{2n+1}{2} + k, k+1, \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\right). \quad (2.15)$$

Ces derniers présentent une singularité en $\frac{a_1}{a_2} = 1$. De plus, on peut montrer que, pour des valeurs du rapport des demi-grands axes relativement petites (c'est-à-dire ≤ 0.5), la série de Fourier de D^{2n+1} converge relativement vite, contrairement à des grandes valeurs de ce même rapport pour lesquelles la convergence est plus pauvre, bien que le rayon théorique de convergence soit unitaire (convergence pour $a_1/a_2 < 1$).

En rassemblant toutes ces expressions, la fonction hamiltonienne est de la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\frac{Gm_0 m_1}{2a_1} - \frac{Gm_0 m_2}{2a_2} \\ &- \frac{Gm_1 m_2}{a_2} \sum_{k, i_l, j_l, l \in \underline{4}} A_{i_l}^{k, j_l} e_1^{|j_1|+2i_1} e_2^{|j_2|+2i_2} \left(\sin \frac{i_1}{2}\right)^{|j_3|+2i_3} \left(\sin \frac{i_2}{2}\right)^{|j_4|+2i_4} \cos \Phi, \end{aligned} \quad (2.16)$$

où Φ est la combinaison d'angles

$$\Phi = [(k + j_1 + j_3)\lambda_1 - (k + j_2 + j_4)\lambda_2 - j_1\varpi_1 + j_2\varpi_2 - j_3\Omega_1 + j_4\Omega_2], \quad (2.17)$$

avec les indices $(k, i_l, j_l, l \in \underline{4})$ étant des entiers, positifs pour $(k, i_l, l \in \underline{4})$ et tels que $j_3 + j_4$ est pair. Les coefficients $A_{i_l}^{k, j_l}$ dépendent uniquement du rapport des demi-grands axes. Pour les raisons de limitation du développement à un ordre fixé évoquées ci-dessus, il sera indispensable de vérifier la convergence numérique de la série (2.16) avant toute application à un système

extrasolaire (cfr Section 2.3.2). L'Hamiltonien présente, à ce stade, six degrés de liberté.

Le développement (2.16) est particulier puisque, lorsque l'on additionne les coefficients des angles présents dans la combinaison Φ , nous obtenons une somme nulle. Ceci traduit le fait qu'ajouter une quantité arbitraire à chacun des angles ne modifie que l'origine des angles et non les forces. De même, le développement (2.16) doit être invariant si l'on change le signe de tous les angles, c'est pourquoi il ne contient que des termes "cosinus". On peut également modifier simultanément les signes des inclinaisons sans changer le problème à traiter. Par conséquent, il faut que la somme des exposants $|j_3| + 2i_3$ et $|j_4| + 2i_4$ soit paire, autrement dit que la somme $j_3 + j_4$ soit paire. Toutes ces propriétés sont à mettre en relation avec l'invariance du problème par rotation (cfr Section 2.1). Enfin, une dernière particularité de l'expression (2.16) est qu'elle possède à son tour la caractéristique de d'Alembert dans les couples $(e_1, \lambda_1 - \varpi_1)$, $(e_2, \lambda_2 - \varpi_2)$, $(\sin \frac{i_1}{2}, \lambda_1 - \Omega_1)$ et $(\sin \frac{i_2}{2}, \lambda_2 - \Omega_2)$.

Dans la suite, nous exprimerons la série (2.16) en fonction des éléments de Delaunay modifiés repris à l'Annexe B et limités au second degré des masses :

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \text{longitude moyenne de } m_i & L_i &= m_i \sqrt{Gm_0 a_i} \\ p_i &= -\text{longitude du péricentre de } m_i (= -\varpi_i) & P_i &= L_i \left[1 - \sqrt{1 - e_i^2} \right] \\ q_i &= -\text{longitude du noeud de } m_i (= -\Omega_i) & Q_i &= L_i \sqrt{1 - e_i^2} [1 - \cos i_i]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.3 Théorie des perturbations par transformées de Lie symplectiques

Il est possible de trouver un ensemble de variables canoniques (p, q) , $p \in \mathbb{R}^n$ et $q \in \Pi^n$, tel que l'Hamiltonien (2.16) puisse s'écrire sous la forme

$$\mathcal{H}(p, q) = \mathcal{H}_0(p) + \epsilon \mathcal{H}_1(p, q), \quad (2.19)$$

où ϵ est un *petit paramètre*. Ce système hamiltonien est dit *quasi-intégrable*, de part le fait qu'il consiste en un *problème intégrable* \mathcal{H}_0 (de solution $p = \text{cste}$ et $q = w_0 t$ avec $w_0 = \partial \mathcal{H}_0 / \partial p$) faiblement influencé par une *perturbation* \mathcal{H}_1 . Une telle formulation s'obtient en introduisant des *coordonnées angle-action* du problème intégrable dans le problème perturbé.

Dans le cas planétaire du problème des trois corps qui nous intéresse, un choix de variables possible menant à la formulation (2.19) est constitué par les variables de Delaunay modifiées, variables qui introduisent bien une formulation angle-action de la partie intégrable (cfr Annexe B). Le paramètre ϵ est, pour ce problème, de l'ordre de la masse de Jupiter exprimée en masse solaire, soit de l'ordre de 10^{-3} . En effet, le développement de l'Hamiltonien (2.4) limité au second degré des masses ($\mathcal{O}(m_1 m_2 / m_0^2)$) est tel que la partie intégrable est, pour sa part, du premier degré des masses ($\mathcal{O}(m_i / m_0)$). Ainsi la perturbation exercée par la seconde partie sur

la partie intégrable n'est que du premier degré des masses, c'est-à-dire $\mathcal{O}(m_i/m_0) \sim 10^{-3}$.

Le flot généré par \mathcal{H}_0 est une approximation de la dynamique réelle du problème à ϵ près (dans le sens où ce flot dévie de la trajectoire réelle d'une quantité de l'ordre de l'unité en un temps de l'ordre de $1/\epsilon$). La but de la *théorie des perturbations* est de chercher une meilleure approximation de la solution (valable sur des temps plus grands que $1/\epsilon$). La théorie généralement utilisée et sur laquelle repose ce travail est basée sur les transformées de Lie symplectiques et est l'objet des travaux de [Hori, 1966] et de [Deprit, 1969]. Vu son utilité à plusieurs reprises au cours de ce travail, nous nous permettons, ci-après, de rappeler le principe général de cette méthode.

2.3.1 Transformées de Lie symplectiques et algorithme de calcul

Supposons une transformation des coordonnées y vers les coordonnées x , développée en série de puissance du petit paramètre ϵ et proche de l'identité

$$x = \mathcal{X}(y, \epsilon) = y + \epsilon \mathcal{X}_1(y) + \epsilon^2 \mathcal{X}_2(y) + \dots \quad (2.20)$$

Pour ϵ suffisamment petit, cette transformation est toujours inversible

$$y = \mathcal{Y}(x, \epsilon) = x + \epsilon \mathcal{Y}_1(x) + \epsilon^2 \mathcal{Y}_2(x) + \dots \quad (2.21)$$

et peut être définie comme la solution du système auxiliaire d'équations différentielles

$$\frac{dx}{d\epsilon} = \mathcal{W}(x, \epsilon) \quad (2.22)$$

pour les conditions initiales $x(\epsilon = 0) = y$. Cette transformation (dépendant du paramètre ϵ) est alors considérée comme un flot engendré par un système d'équations différentielles non autonome. Notons que, pour ϵ suffisamment petit et étant donné la transformation $x = \mathcal{X}(y, \epsilon)$, on peut toujours prendre pour *champ de vecteurs générateur* :

$$\mathcal{W}(x, \epsilon) = \left[\frac{\partial \mathcal{X}(y, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right]_{y=\mathcal{Y}(x, \epsilon)} \quad (2.23)$$

Considérons le cas des systèmes hamiltoniens. Ils sont caractérisés par la relation

$$\dot{x} = \mathcal{J} \mathcal{H}_x^T, \quad (2.24)$$

où \mathcal{J} est la *matrice symplectique principale*. Nous souhaitons maintenir le caractère hamiltonien du système. C'est pourquoi il est nécessaire de restreindre le groupe des transformées de Lie au sous-groupe des transformées de Lie symplectiques, pour lesquelles il faut et il suffit d'imposer que le champ de vecteurs générateur \mathcal{W} soit un champ hamiltonien, c'est-à-dire

$$\mathcal{W} = \mathcal{J} \mathcal{W}_x^T. \quad (2.25)$$

Ainsi, nous définissons les *transformées de Lie symplectiques* comme les transformées $x = \mathcal{X}(y, \epsilon) = y + \epsilon \mathcal{X}_1(y) + \epsilon^2 \mathcal{X}_2(y) + \dots$ solutions du système hamiltonien auxiliaire

$$\frac{dx}{d\epsilon} = \mathcal{J} \mathcal{W}_x^T. \quad (2.26)$$

Enfin, la transformée $g(y, \epsilon)$ de toute fonction analytique $f(x, \epsilon)$ par la transformation (2.20) engendrée par le champ de vecteurs générateur (2.26) est donnée par

$$g(y, \epsilon) = f(\mathcal{X}(y, \epsilon), \epsilon) = \sum_{i \geq 0} \frac{\epsilon^i}{i!} [D^i f(x, \epsilon)]_{x=y; t=0}, \quad (2.27)$$

où la dernière égalité résulte simplement du développement de Taylor en ϵ de la fonction $f(\mathcal{X}(y, \epsilon), \epsilon)$ autour de $\epsilon = 0$. L'opérateur D est défini par

$$Df(x, \epsilon) = \frac{\partial f}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial x} \mathcal{W}_x^T = \frac{\partial f}{\partial \epsilon} + (f; \mathcal{W}), \quad (2.28)$$

où $(f; \mathcal{W})$ désigne la *parenthèse de Poisson* des deux fonctions :

$$(f; \mathcal{W}) \equiv f_x \mathcal{W}_x^T = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \quad (2.29)$$

Les formules (2.27) et (2.28) permettent de décrire un *algorithme de calcul* simple et systématique :

Soit la fonction analytique

$$f(x, \epsilon) = \sum_{i=0} \frac{\epsilon^i}{i!} f_i^{(0)}(x) \quad (2.30)$$

et le champ de vecteurs générateur

$$\mathcal{W} = \sum_{i=0} \frac{\epsilon^i}{i!} \mathcal{W}_{i+1}(x), \quad (2.31)$$

on construit successivement les fonctions intermédiaires $f_i^{(j)}(x)$ du développement des dérivées

$$\frac{d^j}{d\epsilon^j} f(\mathcal{X}(y, \epsilon), \epsilon) = \sum_{i=0} \frac{\epsilon^i}{i!} f_i^{(j)}(x) \quad (2.32)$$

par la formule de récurrence :

$$f_i^{(j)} = f_{i+1}^{(j-1)} + \sum_{k=0}^i C_i^k \left(f_{i-k}^{(j-1)}; \mathcal{W}_{k+1} \right), \quad (2.33)$$

où $C_i^k = \binom{i}{k} = \frac{i!}{k!(i-k)!}$. La transformée $g(y, \epsilon)$ de la fonction $f(x, \epsilon)$ est alors donnée par

$$g(y, \epsilon) = \sum_{i=0} \frac{\epsilon^i}{i!} \left[f_0^{(i)}(x) \right]_{x=y}. \quad (2.34)$$

$$\begin{array}{cccccc}
f_0^{(0)} & & & & & \\
f_1^{(0)} & f_0^{(1)} & & & & \\
f_2^{(0)} & f_1^{(1)} & f_0^{(2)} & & & \\
f_3^{(0)} & f_2^{(1)} & f_1^{(2)} & f_0^{(3)} & & \\
f_4^{(0)} & f_3^{(1)} & f_2^{(2)} & f_1^{(3)} & f_0^{(4)} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

TAB. 2.1: Triangle de Lie

La récurrence est plus facile à visualiser si l'on considère les fonctions intermédiaires $f_i^{(j)}$ disposées, comme à la Table 2.1, en un triangle appelé *triangle de Lie*. Le calcul d'un élément implique uniquement les fonctions de la colonne précédente situées au-dessus ou à la même hauteur. De même, il ne demande la connaissance que des \mathcal{W}_k dont l'indice k est inférieur ou égal au numéro de la ligne de la fonction intermédiaire cherchée (qui se trouve être également la somme des indices).

Cet algorithme sera utilisé dans la suite pour la transformation de fonctions hamiltoniennes, ce qui revient à considérer $f = \mathcal{H}$ dans l'algorithme précédent.

2.3.2 Cadre hamiltonien et équation homologique

Pour l'Hamiltonien présenté à l'équation (2.19), l'algorithme de Lie se résume à résoudre, à chaque ordre k , un même type d'équation, dite *équation homologique* :

$$\mathcal{H}_0^{(k)} - \tilde{\mathcal{H}}_0^{(k)} = \left(\mathcal{H}_0^{(0)}; \mathcal{W}_k \right) = - \sum_{i=1}^n \omega_i \frac{\partial \mathcal{W}_k}{\partial q_i}, \quad (2.35)$$

où $\omega_i = \frac{\partial \mathcal{H}_0^{(0)}}{\partial p_i}$ et $\tilde{\mathcal{H}}_0^{(k)}$ représente une quantité connue. La dernière égalité découle du fait que l'Hamiltonien $\mathcal{H}_0^{(0)}$ dépend seulement des moments p_i . Si l'on développe en série de Fourier le premier membre de l'égalité (2.35)

$$\tilde{\mathcal{H}}_0^{(k)} - \mathcal{H}_0^{(k)} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \left[C_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cos \left(\sum_{l=1}^n i_l q_l \right) + S_{i_1, i_2, \dots, i_n} \sin \left(\sum_{l=1}^n i_l q_l \right) \right], \quad (2.36)$$

la solution peut formellement s'écrire :

$$\mathcal{W}_k = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \left[\frac{C_{i_1, i_2, \dots, i_n} \sin \left(\sum_{l=1}^n i_l q_l \right)}{i_1 \omega_1 + \dots + i_n \omega_n} - \frac{S_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cos \left(\sum_{l=1}^n i_l q_l \right)}{i_1 \omega_1 + \dots + i_n \omega_n} \right]. \quad (2.37)$$

Afin d'assurer l'existence et la convergence du générateur \mathcal{W} , il est bien sûr nécessaire de vérifier qu'aucun des dénominateurs de cette expression n'est trop proche de zéro. Deux possibilités peuvent ainsi poser problème : soit tous les indices sont nuls ($i_1 = i_2 = \dots = i_n = 0$), soit on est dans un cas de résonance (ou, plus précisément, à proximité d'une résonance exacte). Dans les deux cas, les termes incriminés doivent être inclus dans le nouvel Hamiltonien $\mathcal{H}_0^{(k)}$, les autres termes étant intégrés pour former le générateur de la transformation (2.37). Ainsi, dans un cas hors résonance, il faut et il suffit de choisir

$$\mathcal{H}_0^{(k)} = \langle \tilde{\mathcal{H}}_0^{(k)} \rangle, \quad (2.38)$$

où $\langle - \rangle$ signifie la valeur moyenne sur les angles. Quant à la convergence des différentes séries, une preuve rigoureuse peut être évitée en limitant d'emblée le processus à un ordre fini N de termes, suffisamment élevé que pour assurer un reste d'ordre ϵ^{N+1} . Dans ce travail, aucune démonstration de convergence de séries ne sera effectuée : la décroissance des contributions aux différents ordres sera seulement vérifiée jusqu'à un ordre donné (i.e. aucune estimation des restes), en suivant la tradition des astronomes et non des mathématiciens, comme cela a été mis en exergue par [Poincaré, 1892] (Volume II, Chapitre VIII). Dans la suite, nous emploierons l'expression *convergence numérique* pour faire référence à cette décroissance des contributions sans évaluation des restes.

Ainsi dans le cas général où la partie intégrable $\mathcal{H}_0^{(0)}$ de l'Hamiltonien (2.19) dépend des n moments p_i , la moyennisation de Lie mène à une formulation, que l'on note $\bar{\mathcal{H}}$, indépendante des variables angulaires, et le système associé est ainsi complètement intégrable et trivialement intégré (les nouveaux moments deviennent constants et les nouveaux angles sont tout simplement des fonctions linéaires du temps).

Si le problème est dégénéré, comme c'est le cas pour le problème des trois corps où $\mathcal{H}_0^{(0)}$ n'est fonction, dans les variables de Delaunay modifiées, que des moments L_i associés aux variables rapides λ_i , seule une moyennisation par rapport à ces derniers angles est possible, le petit paramètre étant alors, comme nous l'avons vu, de l'ordre de la masse de Jupiter exprimée en masse solaire. Cette moyennisation par rapport aux courtes périodes menant à la formulation du problème des trois corps séculaire est traitée aux Chapitres 3, 5 et 6.

Pour obtenir les fréquences de ce problème séculaire, nous aurons également recours, aux Chapitres 4 et 7, au triangle de Lie pour moyenniser l'Hamiltonien par rapport à ses angles séculaires. Enfin, la dernière moyennisation du Chapitre 7 présente un cas de résonance qu'il sera nécessaire d'écarter par une autre application de l'algorithme de Lie.

2.4 Le manipulateur de séries MSNam

Les calculs symboliques nécessités par ce travail portent sur des séries qui comptent des milliers de termes, rendant illusoire tout traitement manuel. Ils sont réalisés à l'aide d'un manipulateur de séries symbolique, le MSNam, qui a été développé au sein de l'unité de Systèmes dynamiques de notre université. Cet outil est basé sur l'idée décrite dans [Henrard, 1986] ; sa

TAB. 2.2: Exemple de série codée avec MSNam

	λ_1	λ_2	p_1	p_2	q_1	q_2	L_1	L_2	S_1	S_2	E_1	E_2	Coefficient
COS	0	0	0	0	1	-1	0	0	1	1	0	0	0.3238849876021156 E-01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	-0.1619424938010578 E-01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	-0.1619424938010578 E-01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0.1619424938009003 E-01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0.1619424938009003 E-01
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	-0.8056124741380118 E-02

version initiale en Fortran 77 est due à Michèle Moons. Le passage en Fortran 90 et ses dernières améliorations ont été réalisés en 2004 par Jacques Henrard.

Ce calculateur symbolique est conçu pour manipuler des *séries de Poisson* de la forme

$$\sum_{\substack{i_1 \dots i_p \\ j_1 \dots j_q}} A_{i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_q} x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} (j_1 \phi_1 + \dots + j_q \phi_q), \quad (2.39)$$

c'est-à-dire des séries de Fourier de q variables angulaires $\phi_1 \dots \phi_q$ dont les coefficients sont des polynômes des p variables $x_1 \dots x_p$. Les arguments $(j_1 \dots j_q)$ et les exposants $(i_1 \dots i_p)$ sont des entiers et les coefficients $A_{i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_q}$ sont des réels.

Dans le programme MSNam, les arguments, les exposants et une indication selon laquelle l'expression est une fonction "sinus" ou "cosinus" sont encodés dans un tableau d'entiers dont les dimensions peuvent être spécifiées par l'utilisateur; les coefficients sont stockés dans un tableau de réels double précision. Chaque série est identifiée par un entier indiquant la position du premier terme de la série dans les tableaux. Diverses opérations sont disponibles dans le package de sous-routines du MSNam : addition, multiplication et dérivation de séries ou troncature de la série à une précision numérique donnée ne sont qu'un aperçu des possibilités.

A titre d'illustration, nous reprenons, à la Table 2.2, un exemple de série codée avec MSNam dans les mêmes variables que celles utilisées pour traiter notre problème. Les variables trigonométriques sont celles de Delaunay modifiées (cfr Eq. (2.18)). Quant aux variables polynômiales, nous choisissons de travailler avec les quantités sans dimension

$$E_i = \sqrt{\frac{2P_i}{L_i}} \quad \text{et} \quad S_i = \sqrt{\frac{2Q_i}{L_i}}, \quad (2.40)$$

également fonctions des variables de Delaunay modifiées (cfr Chapitres 3 et 6 pour plus de détails sur ces variables). Il est à noter que seuls les moments L_i ne sont pas sans dimension.

En pratique, nous effectuons un changement de variables de sorte à rendre tous les moments non-dimensionnels :

$$\begin{aligned} L_i &= m_i \sqrt{G m_0 a_i} & L_i^* &= L_i / [(m_1 + m_2) \sqrt{G m_0 a_2}] \\ P_i &= L_i \left[1 - \sqrt{1 - e_i^2} \right] & P_i^* &= P_i / [(m_1 + m_2) \sqrt{G m_0 a_2}] \\ Q_i &= L_i \sqrt{1 - e_i^2} [1 - \cos i_i] & Q_i^* &= Q_i / [(m_1 + m_2) \sqrt{G m_0 a_2}] . \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ainsi, les moments L_i sont sans dimension puisqu'ils valent

$$L_1^* = \mu \sqrt{\alpha} \quad \text{et} \quad L_2^* = 1 - \mu, \quad (2.42)$$

avec

$$\alpha = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \quad (2.43)$$

Il en va ainsi pour les autres quantités $E_i^* = \sqrt{2P_i^*/L_i^*}$ et $S_i^* = \sqrt{2Q_i^*/L_i^*}$. Une telle formulation des variables présente un avantage considérable : les séries ne dépendent que des rapports des demi-grands axes et des masses, et non des valeurs individuelles de ces quantités. Afin de ne pas alourdir les notations, ce changement de variables sera sous-entendu dans les chapitres suivants.

Deuxième partie

SYSTÈMES COPLANAIRES

A cause des limitations actuelles des méthodes de détection, les éléments orbitaux osculateurs des planètes extrasolaires ne sont pas entièrement déterminés. En particulier, nous avons vu que la mesure des inclinaisons des planètes reste un épineux problème qui se traduit également en une pauvre détermination des masses des exoplanètes : seules des valeurs minimales sont à présent connues.

En raison de l'absence d'information concernant les inclinaisons relatives des planètes d'un même exosystème, les premières études, tant analytiques que numériques, ont considéré l'hypothèse d'orbites planétaires coplanaires dont le plan orbital commun est incliné de 90° par rapport au plan du ciel. Cette dernière précision signifie que les masses réelles des planètes de tels systèmes coïncident avec les valeurs actuellement observées de ces masses.

De même, nous nous limitons, dans cette première partie, à l'étude des systèmes coplanaires formés de deux planètes hors résonance en moyen mouvement. Ces derniers constituent une première étape intéressante pour la validation de notre modèle analytique basé sur un développement en excentricités (et en inclinaisons dans le cas de systèmes non-coplanaires) des perturbations séculaires entre les deux planètes. En effet, même s'il semble évident que l'approximation de Laplace-Lagrange est inapte à décrire le comportement de systèmes d'excentricités importantes, il est intéressant d'examiner si, en poussant ce même développement à un ordre supérieur (l'ordre 12 en excentricités par exemple), il est possible de reproduire avec précision la dynamique séculaire de systèmes coplanaires dont les planètes arborent des excentricités aussi élevées que celles des systèmes extrasolaires de la Table 1.2.

Chapitre 3

Résonance séculaire non-linéaire du problème coplanaire des trois corps

Le but de ce premier chapitre consacré aux systèmes extrasolaires constitués de deux planètes dont les plans orbitaux sont coplanaires est d'étudier analytiquement les possibles résonances séculaires responsables de l'alignement ou anti-alignement des lignes des apsides des deux planètes, dans la suite également dénommées *résonances apsidales*. Rappelons encore que seuls les systèmes hors résonance en moyen mouvement sont considérés dans cette étude.

Notre approche hamiltonienne du problème séculaire coplanaire des trois corps est basée sur une moyennisation du développement en excentricités des interactions entre les planètes, par rapport aux courtes périodes, au premier ordre des masses, réduisant le problème à deux degrés de liberté. Afin de s'assurer de son applicabilité aux systèmes extrasolaires d'excentricités modérément élevées introduits au Chapitre 1, nous vérifions, à la Section 3.1, la convergence numérique du développement calculé jusqu'à l'ordre 12 en excentricités. Un grand intérêt de ce modèle analytique est qu'il ne dépend que de deux paramètres : le rapport des demi-grands axes et le rapport des masses. Il n'est par conséquent pas dépendant des valeurs que pourrait posséder l'inclinaison du plan orbital commun par rapport au plan du ciel ; les résultats du présent chapitre ne sont donc en rien tributaires des limites actuelles de détection.

La Section 3.2 traite de la réduction du problème séculaire à un seul degré de liberté réalisable grâce à l'intégrale première du déficit de moment angulaire (conséquence de l'invariance par rotation du problème). La représentation géométrique de l'espace de phase de ce problème à un degré de liberté est dès lors possible et nous choisissons d'utiliser l'approche sphérique introduite par [Pauwels, 1983] ne présentant aucune singularité artificielle. Les courbes d'Hamiltonien constant sont aisément dessinées dans cet espace sphérique au moyen de l'intégration numérique des équations différentielles ; elles représentent les trajectoires du système réduit à un degré de liberté le long desquelles les valeurs extrémales des excentricités et le comportement de la différence angulaire des lignes des apsides (libration ou circulation) peuvent être déduits.

En ce qui concerne l'approche linéaire de Laplace-Lagrange étudiée, pour sa part, à la Section 3.3, une transformation de découplage permet de déterminer les fréquences linéaires du système. Les fréquences non-linéaires exigeant la mise en oeuvre d'une théorie de perturbation d'ordre plus élevé en excentricités feront, quant à elles, l'objet du Chapitre 4.

Enfin, la représentation de l'espace de phase met également en évidence les équilibres du problème réduit à un degré de liberté (ou pôles dynamiques). A faibles excentricités, seuls deux équilibres stables existent, l'un correspondant à l'alignement des lignes des apsides et l'autre à l'anti-alignement de ces mêmes lignes. A modérées et hautes excentricités, une zone de résonance séculaire non-linéaire peut apparaître. Cette dernière, découverte numériquement par [Michtchenko et Malhotra, 2004], peut être reproduite avec succès par notre modèle analytique dans le cas d'excentricités modérées, comme le montre la Section 3.4. Aucun système extrasolaire actuellement découvert ne se situe dans cette zone de résonance apsidale.

3.1 Hamiltonien du problème coplanaire

Considérons le problème des trois corps que forment une étoile centrale de masse m_0 et deux planètes d'orbites coplanaires, de masses m_1 et m_2 (m_1 étant selon notre convention la planète la plus proche de l'étoile) et de demi-grands axes a_1 et a_2 . Comme nous l'avons vu à la Section 2.1, l'Hamiltonien décrivant la dynamique de ce problème peut s'exprimer, dans les coordonnées usuelles de Jacobi, de la façon suivante

$$\mathcal{H} = -\frac{Gm_0m_1}{2a_1} - \frac{Gm_0m_2}{2a_2} - Gm_1m_2 \left[\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} - \frac{(\vec{r}_1|\vec{r}_2)}{r_2^3} \right], \quad (3.1)$$

où les notations \vec{r}_i et r_i représentent, respectivement, le vecteur position et la norme du vecteur position du corps m_i . Rappelons que cette expression est obtenue en limitant le développement au second degré des masses ($\mathcal{O}(m_1m_2/m_0^2)$). Ce niveau de troncature est suffisamment précis en regard de l'objectif visé : considérer des planètes de masses comparables à celle de Jupiter.

En développant la perturbation en série des excentricités et des inclinaisons comme explicité à la Section 2.2 et en ne considérant de l'expression (2.16) ainsi obtenue que la partie indépendante des inclinaisons des planètes, l'Hamiltonien du problème coplanaire s'écrit

$$\mathcal{H} = -\frac{Gm_0m_1}{2a_1} - \frac{Gm_0m_2}{2a_2} - \frac{Gm_1m_2}{a_2} \sum_{k,i_1,i_2,j_1,j_2} A_{i_1,i_2,j_1,j_2}^k e_1^{|j_1|+2i_1} e_2^{|j_2|+2i_2} \cos \Phi, \quad (3.2)$$

où Φ est la combinaison d'angles

$$\Phi = [(k + j_1)\lambda_1 - (k + j_2)\lambda_2 - j_1\varpi_1 + j_2\varpi_2]. \quad (3.3)$$

Les indices (k, i_1, i_2, j_1, j_2) sont des entiers, positifs pour (k, i_1, i_2) . Les coefficients A_{i_1,i_2,j_1,j_2}^k dépendent uniquement du rapport des demi-grands axes a_1/a_2 . Deux particularités de ce développement déjà évoquées à la Section 2.2 méritent d'être à nouveau soulignées. Premièrement, la somme des coefficients des angles λ_i et ϖ_i présents dans l'expression (3.3) est nulle. Deuxièmement, l'Hamiltonien (3.2) possède la caractéristique de d'Alembert dans les couples

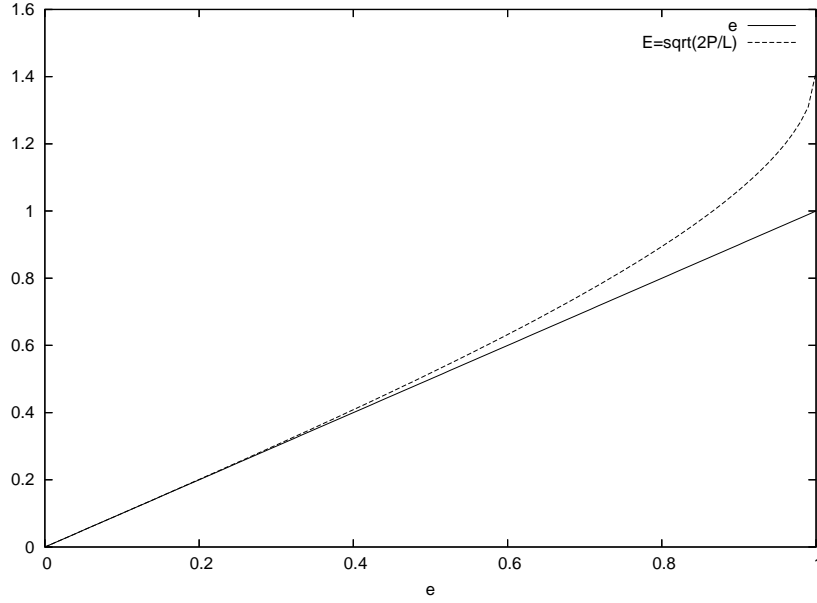


FIG. 3.1: Graphe de la quantité $E = \sqrt{2P/L}$ en fonction de l'excentricité e . Pour des valeurs de l'excentricité inférieures à 0.5, les deux quantités sont très proches.

$(e_1, \lambda_1 - \varpi_1)$ et $(e_2, \lambda_2 - \varpi_2)$.

Notre choix de variables canoniques s'est porté sur les variables classiques de Delaunay modifiées, également limitées au second degré des masses, à savoir

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \text{longitude moyenne de } m_i & L_i &= m_i \sqrt{Gm_0 a_i} \\ p_i &= -\text{longitude du péricentre de } m_i (= -\varpi_i) & P_i &= L_i \left[1 - \sqrt{1 - e_i^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

A la place des excentricités, nous utilisons les expressions $E_i = \sqrt{2P_i/L_i}$ sans dimension et directement reliées aux variables de Delaunay modifiées. Remarquons que pour des excentricités petites à modérées, $E_i \approx e_i$, comme le montre la Figure 3.1. Nous obtenons ainsi une formulation de l'Hamiltonien similaire à la précédente

$$\mathcal{H} = -\frac{Gm_0 m_1}{2a_1} - \frac{Gm_0 m_2}{2a_2} - \frac{Gm_1 m_2}{a_2} \sum_{k, i_1, i_2, j_1, j_2} B_{i_1, i_2, j_1, j_2}^k E_1^{|j_1|+2i_1} E_2^{|j_2|+2i_2} \cos \Phi, \quad (3.5)$$

où $\Phi = [(k + j_1)\lambda_1 - (k + j_2)\lambda_2 + j_1 p_1 - j_2 p_2]$.

Etant intéressés par l'étude de la dynamique à long terme et à condition que le système ne soit pas proche d'une quelconque résonance en moyen mouvement (c'est-à-dire lorsque le rapport des moyens mouvements n_i des planètes ne peut être approché par un nombre rationnel $\frac{q_1}{q_2}$, où les entiers q_1, q_2 et leur différence $q_1 - q_2$ sont petits), nous pouvons moyenner la fonction hamiltonienne par rapport à ses *arguments rapides* λ_i . Pour obtenir l'expression séculaire de l'Hamiltonien, nous avons ainsi simplement retiré de la formulation (3.5) les termes dépendant des longitudes moyennes des planètes. Cela revient à effectuer une moyennisation "aux

ciseaux” ou, en d’autres mots, une moyennisation au premier ordre des masses. Cela conduit à la formulation suivante

$$\mathcal{K} = -\frac{Gm_1m_2}{a_2} \sum_{k,i_1,i_2} C_{i_1,i_2}^k E_1^{k+2i_1} E_2^{k+2i_2} \cos k(p_1 - p_2), \quad (3.6)$$

où a_i , E_i et p_i représentent les valeurs moyennées par rapport aux courtes périodes. Les particularités du développement (3.2) sont maintenues, à savoir que la somme des coefficients des variables angulaires de l’expression moyennée (3.6) est nulle et que la caractéristique de d’Alembert s’exerce à présent sur les couples (E_1, p_1) et (E_2, p_2) . En outre, comme cette expression ne dépend plus des variables λ_i , les moments associés L_i sont constants et, par conséquent, il en est de même pour les demi-grands axes a_i . Les deux premiers termes de l’expression (3.5) dépendant des moments L_i constants ont ainsi été supprimés, l’Hamiltonien étant défini à une constante près. De plus, ce dernier dépend uniquement de la différence des longitudes des péri-centres $p_1 - p_2$, ce qui implique que la somme $P_1 + P_2$ est une intégrale première du problème (cfr Section 3.2). Cette intégrale, liée à l’invariance du moment angulaire total, permettra dans la suite de réduire le problème à un seul degré de liberté.

A ce stade, trois remarques concernant notre approche sont essentielles. D’abord, une hypothèse importante de cette moyennisation est qu’elle n’est pas valable pour des systèmes trop proches de la résonance. Cette notion de proximité n’est pas facilement définissable ni quantifiable. Nous nous y intéresserons au Chapitre 5, où l’on tentera de quantifier la proximité d’un système à une quelconque résonance en moyen mouvement, et ce afin d’identifier les systèmes extrasolaires pouvant ou ne pouvant pas être traités par cette approche séculaire. Ensuite, notre moyennisation n’étant que du premier ordre, nous considérons que les valeurs des éléments orbitaux osculateurs sont inchangées par la moyennisation par rapport aux courtes périodes. L’erreur commise par cette approximation est plus petite que l’incertitude actuelle quant aux données observées et sera également étudiée plus en détail au Chapitre 5. Enfin, afin d’assurer une précision optimale, c’est-à-dire une précision suffisante tout en limitant le nombre de termes de la série (3.6) à considérer, nous choisissons de limiter le développement à l’ordre 12 en excentricités (i.e. $k + i_1 + i_2 = 6$).

Avant d’analyser plus en détail ce modèle simplifié, il est important de vérifier s’il peut être appliqué aux systèmes extrasolaires, malgré les hautes valeurs d’excentricités que présentent la plupart de ces derniers. En effet, il est légitime de se demander si le développement précédent en excentricités peut représenter la dynamique de ces systèmes avec une précision suffisante. Pour ce faire, nous avons calculé la contribution qu’apporte chaque ordre en excentricités, de l’ordre 2 à l’ordre 12, pour les différents systèmes extrasolaires introduits au Chapitre 1, et reporté cette convergence numérique –*convergence au sens des astronomes* [Poincaré, 1892] (cfr Section 2.3.2)– à la Table 3.1. La première partie du tableau reprend les valeurs des éléments orbitaux osculateurs : $\alpha = a_1/a_2$ (le rapport des demi-grands axes), $\mu = m_1/(m_1 + m_2)$ (le rapport des masses), les excentricités e_1 , e_2 et la différence des longitudes des péri-centres $p_1 - p_2$ (notée v , cfr Section 3.2), seuls éléments nécessaires à l’étude analytique menée dans le présent chapitre. La seconde partie du tableau reprend les contributions des différents ordres

TAB. 3.1: Eléments orbitaux osculateurs et convergence numérique du développement en série \mathcal{K} (3.6) pour les systèmes extrasolaires des classes Ib, II et III de la Table 1.2. Seuls les éléments affichés en haut du tableau sont nécessaires à l'étude analytique réalisée dans ce chapitre. Une bonne convergence numérique de l'Hamiltonien est vérifiée pour chaque système.

	v And. 2006a	v And. 2006b	HD 217107	HD 38529	HD 190360	HD 74156
α	0.328	0.331	0.017	0.035	0.033	0.086
μ	0.335	0.334	0.347	0.058	0.037	0.232
$e_1(0)$	0.28	0.254	0.132	0.29	0.01	0.636
$e_2(0)$	0.27	0.242	0.537	0.36	0.36	0.583
$v(0)_{\text{(rad)}}$	0.175	0.456	2.466	-1.274	0	1.063
n	contribution d'ordre n à l'Hamiltonien \mathcal{K}					
2	$4.6 \cdot 10^{-03}$	$4.1 \cdot 10^{-03}$	$3.6 \cdot 10^{-05}$	$1.0 \cdot 10^{-04}$	$5.5 \cdot 10^{-05}$	$2.2 \cdot 10^{-03}$
4	$2.1 \cdot 10^{-04}$	$1.6 \cdot 10^{-04}$	$1.2 \cdot 10^{-05}$	$1.5 \cdot 10^{-05}$	$7.3 \cdot 10^{-06}$	$8.5 \cdot 10^{-04}$
6	$7.2 \cdot 10^{-06}$	$5.2 \cdot 10^{-06}$	$3.1 \cdot 10^{-06}$	$1.7 \cdot 10^{-06}$	$8.2 \cdot 10^{-07}$	$2.5 \cdot 10^{-04}$
8	$2.2 \cdot 10^{-07}$	$1.6 \cdot 10^{-07}$	$7.6 \cdot 10^{-07}$	$1.8 \cdot 10^{-07}$	$8.3 \cdot 10^{-08}$	$6.6 \cdot 10^{-05}$
10	$6.6 \cdot 10^{-09}$	$4.9 \cdot 10^{-09}$	$1.7 \cdot 10^{-07}$	$1.7 \cdot 10^{-08}$	$7.8 \cdot 10^{-09}$	$1.6 \cdot 10^{-05}$
12	$2.1 \cdot 10^{-10}$	$1.7 \cdot 10^{-10}$	$3.7 \cdot 10^{-08}$	$1.5 \cdot 10^{-09}$	$7.1 \cdot 10^{-10}$	$3.8 \cdot 10^{-06}$

	HD 168443	HD 169830	HD 20206	HD 12661	HD 108874	47 Uma
α	0.077	0.225	0.325	0.324	0.392	0.273
μ	0.307	0.416	0.877	0.594	0.572	0.660
$e_1(0)$	0.5286	0.31	0.435	0.35	0.07	0.049
$e_2(0)$	0.2125	0.33	0.267	0.2	0.25	0
$v(0)_{\text{(rad)}}$	-1.881	1.815	-1.434	-2.257	-4.033	0.279
n	contribution d'ordre n à l'Hamiltonien \mathcal{K}					
2	$8.0 \cdot 10^{-04}$	$4.7 \cdot 10^{-03}$	$1.3 \cdot 10^{-02}$	$9.8 \cdot 10^{-03}$	$6.2 \cdot 10^{-03}$	$7.8 \cdot 10^{-05}$
4	$6.3 \cdot 10^{-06}$	$7.6 \cdot 10^{-04}$	$1.2 \cdot 10^{-03}$	$9.9 \cdot 10^{-04}$	$7.3 \cdot 10^{-04}$	$-3.4 \cdot 10^{-08}$
6	$-1.1 \cdot 10^{-06}$	$1.1 \cdot 10^{-04}$	$1.1 \cdot 10^{-04}$	$1.0 \cdot 10^{-04}$	$8.8 \cdot 10^{-05}$	$-1.2 \cdot 10^{-11}$
8	$-8.6 \cdot 10^{-08}$	$1.5 \cdot 10^{-05}$	$1.1 \cdot 10^{-05}$	$1.1 \cdot 10^{-05}$	$1.1 \cdot 10^{-05}$	$6.0 \cdot 10^{-16}$
10	$-4.2 \cdot 10^{-09}$	$2.0 \cdot 10^{-06}$	$1.3 \cdot 10^{-06}$	$1.4 \cdot 10^{-06}$	$1.5 \cdot 10^{-06}$	$1.4 \cdot 10^{-18}$
12	$-1.7 \cdot 10^{-10}$	$2.9 \cdot 10^{-07}$	$1.5 \cdot 10^{-07}$	$1.7 \cdot 10^{-07}$	$2.1 \cdot 10^{-07}$	$2.9 \cdot 10^{-22}$

TAB. 3.2: Comparaison des convergences numériques du développement de la perturbation entière \mathcal{H} et du même développement limité aux termes séculaires \mathcal{K} , dans le cas d'orbites coplanaires. Le rapport des demi-grands axes est fixé à $a_1/a_2 = 0.2$.

Ordre en E_i	Série entière (3.5)		Termes séculaires (3.6)	
	Coefficient le plus élevé	Nombre de termes	Coefficient le plus élevé	Nombre de termes
0	1.01	16	1.01	1
1	1.03	62	0.	0
2	1.05	156	1.62×10^{-2}	3
3	1.20	310	0.	0
4	1.65	544	2.89×10^{-2}	6
5	3.15	868	0.	0
6	5.65	1 304	3.92×10^{-2}	10
7	9.74	1 860	0.	0
8	2.11×10^1	2 560	5.07×10^{-2}	15
9	4.40×10^1	3 410	0.	0
10	8.95×10^1	4 433	7.30×10^{-2}	21
11	1.94×10^2	5 637	0.	0
12	4.25×10^2	7 045	1.22×10^{-1}	28

à l'Hamiltonien (3.6), obtenues en sommant les termes d'un ordre donné en E_1 et E_2 et en les évaluant aux conditions initiales représentées en haut du tableau. Le facteur $-Gm_1m_2/a_2$ est omis dans cette évaluation. La décroissance des contributions y est évidente et les convergences numériques sont excellentes (contributions d'ordre 12 variant entre 10^{-6} et 10^{-10}) pour tous les systèmes extrasolaires de deux planètes actuellement découverts et recensés à la Table 1.2.

Remarquons également la convergence numérique particulière du système 47 Uma indiquée à titre d'illustration. Comme nous l'avons vu, ce système est assez semblable au Système Solaire dans le sens où il est doté de faibles excentricités ($e_1 = 0.049$ et $e_2 = 0$) et proche d'une résonance en moyen mouvement (la résonance 5/2). L'étude de tels systèmes de la classe Ib est généralement limitée à l'ordre 2 en excentricités (cfr e.g. l'étude des interactions séculaires entre Jupiter et Saturne, [Murray et Dermott, 1999], Section 7.3). Nous renvoyons au cadre théorique bien développé de [Michtchenko et Ferraz-Mello, 2001] pour l'analyse de l'exosystème 47 Uma (cfr Section 1.4.1).

Malgré les excentricités importantes, il semble que la fonction hamiltonienne (3.6) représente la dynamique du système avec une précision suffisante lorsque nous limitons le développement à l'ordre 12. Une explication possible des bonnes convergences numériques affichées à la Table 3.1, même pour des excentricités aussi élevées que celles des systèmes HD 74156 et HD 168443, est le fait que les séries composées des termes séculaires (3.6) semblent mieux converger que les séries représentant la perturbation entière (3.5). Rappelons que nous traitons ici de la convergence numérique, par opposition à la convergence mathématique –*convergence au sens des géomètres* [Poincaré, 1892]–. Pour essayer de quantifier cette meilleure conver-

gence numérique, la Table 3.2 reprend le plus grand coefficient (en valeur absolue) de la série entière \mathcal{H} et de la série limitée aux termes séculaires \mathcal{K} à chaque ordre des E_i . Nous constatons une différence assez importante dans l'ordre de grandeur de ces termes. Enfin, la Table 3.2 indique également le nombre de termes de chaque série à chaque ordre. L'approche séculaire comporte seulement 84 termes, soit environ 300 fois moins de termes que le développement entier composé de 28 205 termes (dans le cas où les termes du type $k(\lambda_1 - \lambda_2)$ sont calculés jusqu'à $k = 15$). Tous ces facteurs participent certainement à la bonne convergence numérique de l'Hamiltonien des systèmes extrasolaires généralement observée, même à des excentricités assez élevées.

3.2 Réduction à un degré de liberté et représentation de l'espace de phase

Dans l'optique de réduire le problème à seulement un degré de liberté, nous introduisons les variables canoniques suivantes

$$\begin{aligned} u &= p_2 & U &= (P_1 + P_2)/[(m_1 + m_2)\sqrt{Gm_0a_2}] \\ v &= p_1 - p_2 & V &= P_1/[(m_1 + m_2)\sqrt{Gm_0a_2}], \end{aligned} \quad (3.7)$$

où le facteur $(m_1 + m_2)\sqrt{Gm_0a_2}$ a pour but de rendre non-dimensionnelles les actions U et V . Seul l'angle v est présent dans l'Hamiltonien (3.6), ce qui signifie que U est une intégrale première du problème. La constante U est, en quelque sorte, une moyenne pondérée des carrés des deux excentricités :

$$U = \mu\sqrt{\alpha} \left[1 - \sqrt{1 - e_1^2} \right] + (1 - \mu) \left[1 - \sqrt{1 - e_2^2} \right]. \quad (3.8)$$

Cette relation constante implique que les excentricités varient en sens opposés : lorsque l'une croît, l'autre décroît. La quantité $P_1 + P_2$ est l'expression, dans le cas coplanaire, d'un invariant du système séculaire bien connu en mécanique céleste et baptisé par [Laskar, 1997] *angular momentum deficit*. U correspond ainsi au déficit de moment angulaire coplanaire non-dimensionnel.

A une constante près (les deux premiers termes de l'expression (3.5)) et à un facteur près (le facteur $-Gm_1m_2/a_2$) qui peut être absorbé en redéfinissant l'échelle de temps, l'Hamiltonien s'écrit dans ces nouvelles variables

$$\mathcal{K}^* = \sum_{n \geq 1} U^n \sum_{k=0}^n \sum_{i_1=0}^{n-k} C_{i_1, i_2}^k \left[\frac{2V}{U\mu\sqrt{\alpha}} \right]^{(k+2i_1)/2} \left[\frac{2(U-V)}{U(1-\mu)} \right]^{(k+2i_2)/2} \cos kv, \quad (3.9)$$

où $i_2 = n - k - i_1$. Le moment U étant constant, l'Hamiltonien est ainsi réduit à un seul degré de liberté (v, V) .

Les trajectoires de ce système à un seul degré de liberté sont les courbes de niveau de la fonction hamiltonienne lorsqu'elles sont représentées dans un repère à deux dimensions. Généralement, les courbes de niveau sont dessinées dans un plan dont les coordonnées polaires sont

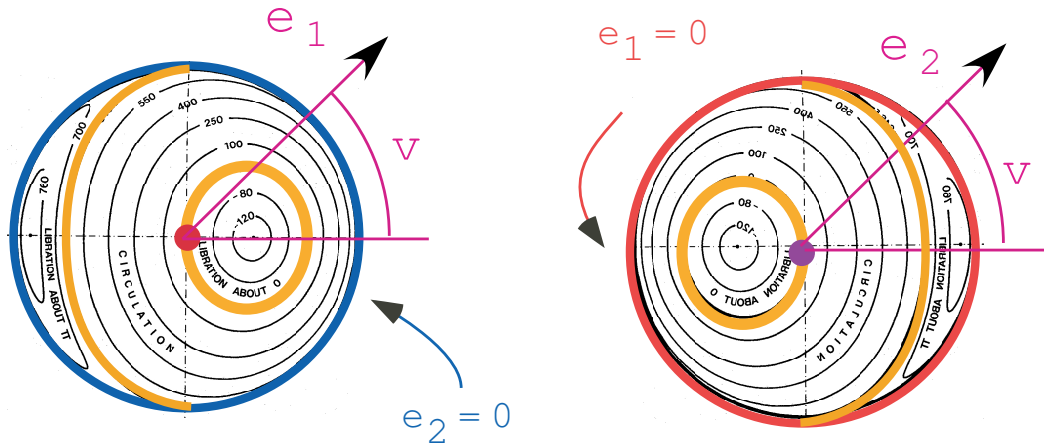


FIG. 3.2: Représentation classique des courbes de niveau de l'Hamiltonien (3.9) dans un plan paramétré par des coordonnées polaires où une des excentricités est la distance au centre de la représentation et où la différence des longitudes des péricentres est la variable angulaire. Le défaut de cette représentation est que le cercle extérieur représente un simple point $e_i = 0$.

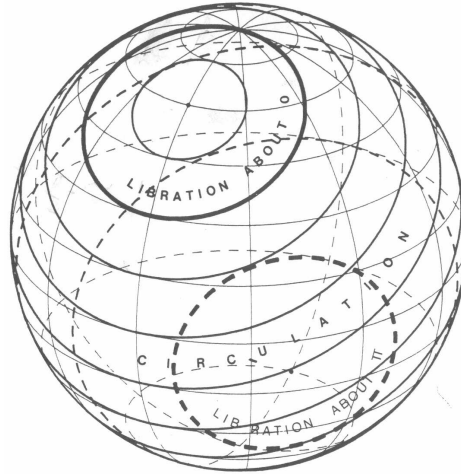


FIG. 3.3: Espace de phase sphérique introduit par T. Pauwels (Source : [Pauwels, 1983])

v et e_1 ou v et e_2 . Un exemple d'une telle représentation dans les plans $(e_i \cos v, e_i \sin v)$ est donné à la Figure 3.2. Le fait que les cercles extérieurs correspondent en réalité à un seul point ($e_2 = 0$ à gauche et $e_1 = 0$ à droite) introduit des singularités artificielles dans le problème et rend plus difficile l'interprétation des figures.

Nous préférons utiliser la représentation de l'espace de phase $U = cste$ introduite par [Pauwels, 1983] et schématisée à la Figure 3.3. Pour ce faire, considérons l'angle ϕ défini par l'équation

$$\frac{P_1}{P_1 + P_2} = \frac{V}{U} = \frac{1}{2}[1 - \sin \phi]. \quad (3.10)$$

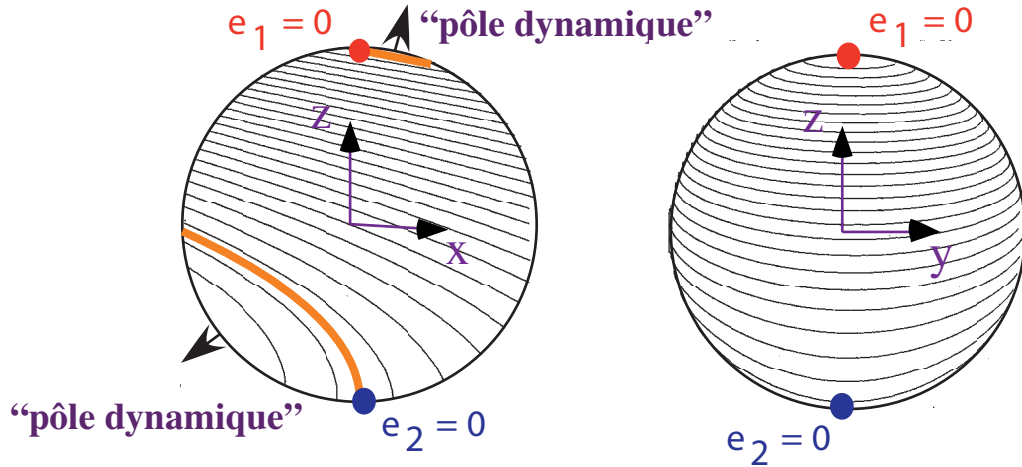


FIG. 3.4: Projections sur les plans $[x, z]$ et $[y, z]$ de la sphère de Pauwels. Les traits les plus épais correspondent aux courbes de niveau passant par les pôles géométriques (c'est-à-dire les points de la sphère en lesquels une des excentricités s'annule). Dans la représentation plus traditionnelle (cfr Figure 3.2), ces points sont singuliers, contrairement à notre représentation sphérique où rien ne les différencie l'un de l'autre.

Puisque le quotient V/U se situe dans l'intervalle $[0, 1]$ (en effet $V/U = 0$ lorsque $e_1 = 0$ et $V/U = 1$ lorsque $e_2 = 0$), l'angle ϕ est toujours compris dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. La variable $v = p_1 - p_2$ est indéfinie aux valeurs extrêmes de ce dernier intervalle. Ainsi l'espace de phase a la topologie d'une sphère de latitude ϕ et de longitude v . Les valeurs particulières $e_1 = 0$ et $e_2 = 0$ représentent donc les *pôles géométriques* de la sphère : l'excentricité de la planète intérieure s'annule au Pôle Nord de la sphère et celle de la planète extérieure au Pôle Sud. Nous pouvons dessiner les courbes de niveau de l'Hamiltonien (3.9) sur ce nouvel espace de phase sphérique et, en représentant les projections de cette sphère sur les plans $[x, z]$ et $[y, z]$, nous obtenons des graphes semblables à ceux de la Figure 3.4. Il est à noter que ces projections n'ont été réalisées que pour une demi-sphère afin d'éviter toute surcharge du graphe. Ainsi, la projection dans le plan $[y, z]$ comprend uniquement les portions des courbes d'Hamiltonien constant qui correspondent à une coordonnée x positive ou, en termes de longitude v , qui correspondent à une longitude comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ (lorsque $y = -1$) et $\frac{\pi}{2}$ (lorsque $y = 1$), $y = 0$ représentant la longitude nulle. De même, la projection dans le plan $[x, z]$ est celle des longitudes comprises entre 0 (lorsque $x = 1$) et π (lorsque $x = -1$).

Outre les pôles géométriques, deux autres points attirent notre attention : ce sont les équilibres du problème à un degré de liberté, également dénommés *pôles dynamiques* dans la suite. Les équations hamiltoniennes montrent que ces équilibres sont situés en $v = 0$ (correspondant à la partie droite de la figure de gauche et au centre de la figure de droite) et $v = \pi$ (correspondant à la partie gauche de la figure de gauche). Ainsi les équilibres correspondent à l'alignement et l'anti-alignement des lignes des apsides. L'existence de ces équilibres est mentionnée par [Poincaré, 1892] dans son étude des “solutions périodiques de la deuxième sorte”, dans le cas de très faibles excentricités.

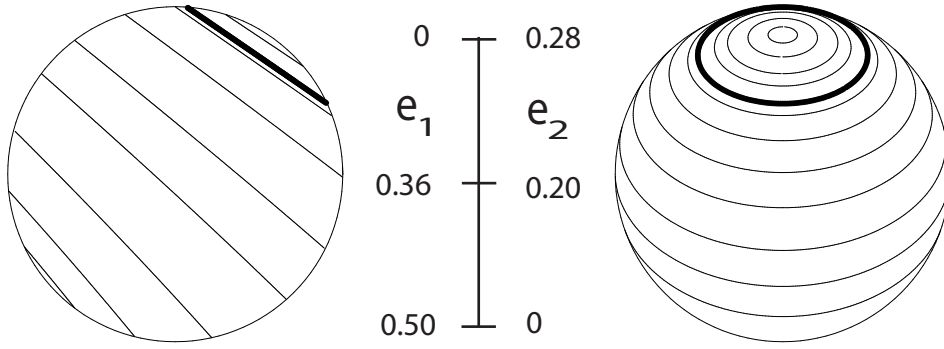


FIG. 3.5: Projections sur les plans $[x, z]$ (à gauche) et $[y, z]$ (à droite) des sphères de Pauwels pour $\alpha = 0.331$, $\mu = 0.334$ et $U = 0.0261$. L'échelle indique les valeurs des excentricités aux pôles géométriques et à l'équateur ($\phi = 0$). Les traits épais marquent le niveau d'énergie du système v Andromède (paramétrisation 2006b).

Chaque courbe d'Hamiltonien constant divise la sphère en deux parties. Si les deux pôles géométriques sont dans la même partie, le comportement de l'angle v est qualifié de *libration* ; autrement on parle de *circulation*. Les pôles dynamiques sont ainsi les centres des librations correspondant aux *résonances apsidales*. Il est important de remarquer que la distinction entre libration et circulation dépend essentiellement des coordonnées utilisées pour représenter le problème et qu'il n'y a pas de différence du point de vue dynamique entre ces deux états dans le sens où on ne peut pas à proprement parler de résonance.

Les lignes de contour \mathcal{K}^* sont dessinées sur la sphère de Pauwels grâce à l'intégration numérique des équations différentielles, la direction d'intégration étant l'intersection du plan perpendiculaire au gradient de \mathcal{K}^* et du plan tangent à la sphère. Le long d'une ligne de contour, on peut aisément calculer les valeurs extrêmes des excentricités ainsi que l'amplitude de libration de la différence angulaire des péricentres v .

Comme illustration, analysons les planètes c-d du système extrasolaire v Andromède dont les paramètres sont repris à la Table 3.1 (nouvelle paramétrisation notée 2006b) et dont les projections de la sphère de Pauwels se trouvent à la Figure 3.5. En traits épais sont dessinées les lignes de contour correspondant à cet exosystème. Ce dernier est proche de l'équilibre associé à la libration de la différence angulaire des péricentres autour de 0° . L'amplitude de cette libration est d'environ 64° . De plus, durant cette oscillation, les excentricités des planètes (surtout celle de la planète intérieure) subissent des variations importantes : e_1 croît de 0.02 à 0.28 tandis que, dans le même temps, e_2 diminue de 0.28 à 0.23. Ces valeurs peuvent être lues sur l'échelle graduée également représentée à la Figure 3.5 et donnant les valeurs des excentricités tant aux pôles géométriques qu'à l'équateur de la sphère.

Le même type d'étude peut être mené pour les autres systèmes extrasolaires de la Table 3.1. Les valeurs maximales et minimales des excentricités atteintes le long de la courbe d'Hamiltonien constant correspondant à chaque exosystème sont données à la Table 3.3. Il y est aussi

TAB. 3.3: Valeurs des paramètres U et $V(0)$ (valeur initiale de V) ainsi que des maxima et minima atteints par les excentricités des planètes des systèmes présentés à la Table 3.1 lors de leur oscillation séculaire. La dernière colonne indique le type de comportement de la variable angulaire $v = p_1 - p_2$ (libration ou circulation).

	U	$V(0)$	$\min e_1$	$\max e_1$	$\min e_2$	$\max e_2$	v
v Andro 2006a	0.0324	0.0077	0.05	0.28	0.27	0.31	lib (0)
v Andro 2006b	0.0261	0.0063	0.02	0.28	0.23	0.28	lib (0)
HD 217107	0.1025	0.0004	0.13	0.16	0.54	0.54	circ
HD 38529	0.0636	0.0005	0.27	0.30	0.36	0.36	circ
HD 190360	0.0646	3×10^{-07}	0.01	0.02	0.36	0.36	lib (0)
HD 74156	0.1596	0.0155	0.42	0.72	0.57	0.60	circ
HD 168443	0.0287	0.0129	0.51	0.57	0.20	0.22	circ
HD 169830	0.0424	0.0097	0.20	0.53	0.21	0.36	circ
HD 12661	0.0296	0.0214	0.09	0.39	0.13	0.37	lib (π)

stipulé le type de comportement de la différence angulaire des péricentres (libration ou circulation) et les valeurs des moments U (constant le long du mouvement) et $V(0)$ (valeur de V correspondant aux paramètres initiaux du système). Pour des raisons de proximité à une résonance en moyen mouvement qui seront explicitées au Chapitre 5, nous ne réalisons pas l'étude des systèmes HD 202206 et HD 108874. Trois systèmes sont caractérisés par une libration de la différence angulaire des lignes des apsides (autrement dit, en résonance apsidale) : v Andromède (2006a ou 2006b) et HD 190360 en libration autour de l'alignement des lignes des apsides et HD 12661 en libration autour de l'anti-alignement de ces mêmes lignes.

Les valeurs individuelles des demi-grands axes et des masses ne sont pas nécessaires à l'étude de la dynamique du cas d'orbites coplanaires que nous venons de mener. Seuls les deux paramètres physiques que sont le rapport des demi-grands axes α et le rapport des masses μ sont pris en compte dans la représentation de l'espace de phase. De plus, comme nous l'avons évoqué au Chapitre 1, les valeurs des masses des exoplanètes ne sont, actuellement, pas correctement déterminées, en ce sens où seul le produit $m_k \sin i_k$ est connu pour chaque planète k , i_k étant l'inclinaison du plan orbital du k -ème corps par rapport au plan du ciel. Dans le cas d'orbites coplanaires, les valeurs i_1 et i_2 sont identiques. Comme seul est nécessaire le rapport des masses, les résultats précédemment calculés sont indépendants des valeurs que pourrait posséder l'inclinaison du plan orbital commun, et ne sont donc pas tributaires des limites actuelles de détection.

3.3 Fréquences linéaires

Considérons à nouveau la formulation à deux degrés de liberté de l'Hamiltonien du problème coplaire des trois corps (3.6) et limitons-nous à une première approximation constituée

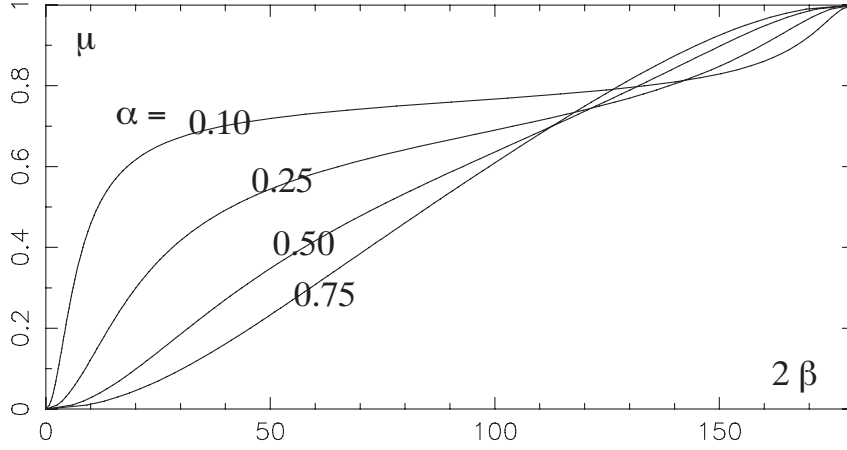


FIG. 3.6: L'angle 2β versus le rapport des masses $\mu = m_1/(m_1 + m_2)$ pour quatre valeurs du rapport des demi-grands axes $\alpha = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$

uniquement des termes de degré 2 en E_i :

$$\mathcal{L} = -n_2 \frac{(m_1 + m_2)}{m_0} [aP_1 + bP_2 + c\sqrt{4P_1P_2} \cos(p_1 - p_2)]. \quad (3.11)$$

Ces termes sont les termes principaux de l'Hamiltonien pour autant que les excentricités soient faibles. Le facteur $n_2 = \sqrt{Gm_0/a_2^3}$ est le moyen mouvement képlérien de m_2 . Les coefficients (a, b, c) valent respectivement $a = 2C_{1,0}^0(1 - \mu)/\sqrt{\alpha}$, $b = 2C_{0,1}^0\mu$ et $c = C_{0,0}^1\sqrt{\mu(1 - \mu)}/\sqrt{\alpha}$.

Exprimé dans les coordonnées cartésiennes $Y_i = \sqrt{2P_i} \sin p_i$ et $X_i = \sqrt{2P_i} \cos p_i$, l'Hamiltonien (3.11) est quadratique et, par conséquent, les équations hamiltoniennes associées sont linéaires. Ce problème est appelé *problème de Laplace-Lagrange* dans la littérature. Dans cette section, nous cherchons à le munir de coordonnées angle-action afin d'obtenir une expression des fréquences linéaires du système à deux degrés de liberté.

Pour ce faire, nous avons recours à une transformation canonique de l'espace de phase imaginée en premier lieu par [Poincaré, 1892] et généralisée récemment sous le nom de “untangling transformation” par [Henrard et Lemaître, 2005]. Cette dernière sera baptisée, dans la suite, *transformation de découplage* et se formule :

$$\begin{aligned} Y_1 &= Z_1 \cos \beta + Z_2 \sin \beta & X_1 &= W_1 \cos \beta + W_2 \sin \beta \\ Y_2 &= -Z_1 \sin \beta + Z_2 \cos \beta & X_2 &= -W_1 \sin \beta + W_2 \cos \beta. \end{aligned} \quad (3.12)$$

En définissant l'angle β par l'équation $\tan 2\beta = 2c/(b - a)$ et en introduisant les coordonnées polaires $Z_i = \sqrt{2P'_i} \sin p'_i$ et $W_i = \sqrt{2P'_i} \cos p'_i$, nous obtenons une formulation de l'Hamiltonien quadratique telle que ses deux degrés de liberté sont à présent découplés :

$$\mathcal{L}' = -n_2 \frac{(m_1 + m_2)}{m_0} \left\{ [s + \sqrt{d^2 + c^2}] P'_1 + [s - \sqrt{d^2 + c^2}] P'_2 \right\}, \quad (3.13)$$

où $s = (a + b)/2$ et $d = (a - b)/2$. Notons que la valeur de l'intégrale première mise en évidence à la section précédente est conservée par cette transformation : $P'_1 + P'_2 = P_1 + P_2 =$

$(m_1 + m_2)\sqrt{Gm_0a_2}U$. La valeur de l'angle 2β en fonction du rapport des masses μ est représentée à la Figure 3.6 pour différentes valeurs du rapport α des demi-grands axes.

De la même manière que précédemment, nous pouvons représenter les courbes de niveau de l'Hamiltonien linéaire découplé \mathcal{L}' sur un espace de phase sphérique. Semblablement à ce qui a été fait à la Section 3.2, définissons l'angle Ψ par l'équation $2P'_1/(P'_1 + P'_2) = 1 - \sin \Psi$. Ce dernier angle définit la latitude de la nouvelle sphère, la longitude étant définie par l'angle $w = p'_1 - p'_2$. Du fait de la constance du moment P'_1 , l'angle Ψ est lui-même constant, ce qui implique que les courbes de niveau de l'Hamiltonien (3.13) sont cette fois des cercles parallèles de latitude constante.

Dans le cas présent, la rotation (3.12) peut être interprétée assez facilement en considérant les espaces de phase sphériques obtenus avant et après la transformation de découplage. En effet, la sphère de Pauwels obtenue à la Section 3.2 était pourvue des coordonnées cartésiennes suivantes :

$$\begin{aligned} x &= U' \cos \phi \cos v &= \sqrt{4P_1P_2} \cos v &= X_1X_2 + Y_1Y_2 \\ y &= U' \cos \phi \sin v &= \sqrt{4P_1P_2} \sin v &= X_1Y_2 - X_2Y_1 \\ z &= U' \sin \phi &= P_2 - P_1 &= (X_2^2 + Y_2^2 - X_1^2 - Y_1^2)/2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec $U' = P'_1 + P'_2 = (m_1 + m_2)\sqrt{Gm_0a_2}U$. En dénommant (x', y', z') les coordonnées cartésiennes de la sphère de latitude Ψ et de longitude w (c'est-à-dire $x' = U' \cos \Psi \cos w$, $y' = U' \cos \Psi \sin w$, $z' = U' \sin \Psi$), la rotation des variables d'un angle β inhérente à la transformation de découplage (3.12) revient à effectuer physiquement une rotation d'un angle 2β de la première sphère de Pauwels (3.14) autour de l'axe y . En effet, les relations précédentes permettent de déduire :

$$\begin{aligned} x &= x' \cos 2\beta + z' \sin 2\beta \\ y &= y' \\ z &= -x' \sin 2\beta + z' \cos 2\beta. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dans l'espace de phase obtenu après la transformation de découplage, les pôles géométriques, $e_1 = 0$ et $e_2 = 0$, ne sont plus situés aux latitudes $\pi/2$ et $-\pi/2$ mais ont été déplacés d'un angle 2β le long du méridien $w = p'_1 - p'_2 = 0$. Les pôles dynamiques de cette nouvelle représentation, centres des cercles concentriques, sont à présent situés aux Pôles Nord et Sud ; ils correspondent aux équilibres $P'_1 = 0$ et $P'_1 = U'$. Les courbes $\mathcal{L}' = cste$ sont alors les intersections de la sphère avec les plans parallèles à $z' = z \cos 2\beta + x \sin 2\beta = 0$. La Figure 3.7 est une illustration des sphères de Pauwels obtenues avant et après la transformation de découplage. Il est à noter le comportement typique des courbes de niveau disposées en lignes parallèles (et non sous forme de courbes comme à la Figure 3.4), dû à la limitation de l'Hamiltonien aux termes de degré 2 en E_i (cfr Eq. (3.11)).

Toutes les trajectoires sont périodiques de période

$$T = \frac{\pi m_0}{n_2(m_1 + m_2)\sqrt{d^2 + c^2}}. \quad (3.16)$$

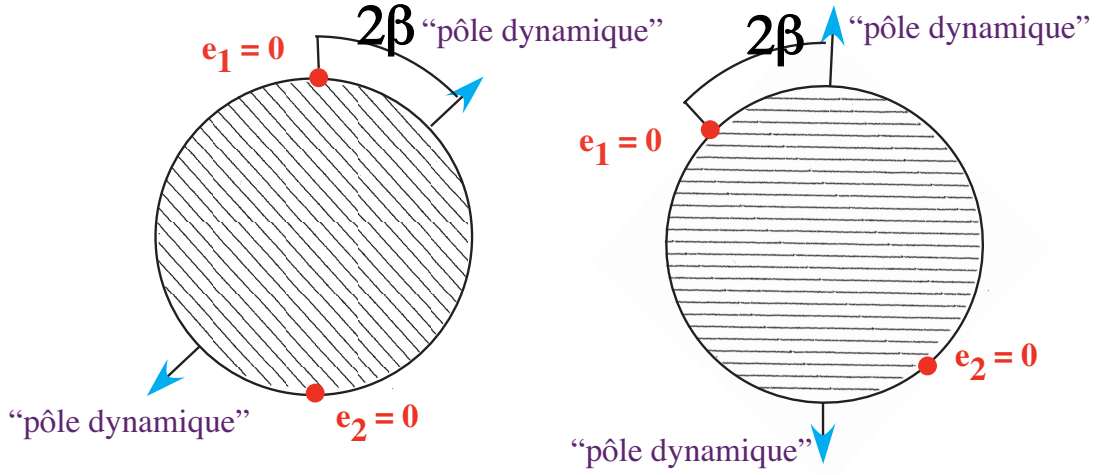


FIG. 3.7: Sphères de Pauwels (projetées dans le plan $[x, z]$) obtenues avant (à gauche) et après (à droite) la transformation de découplage (3.12)

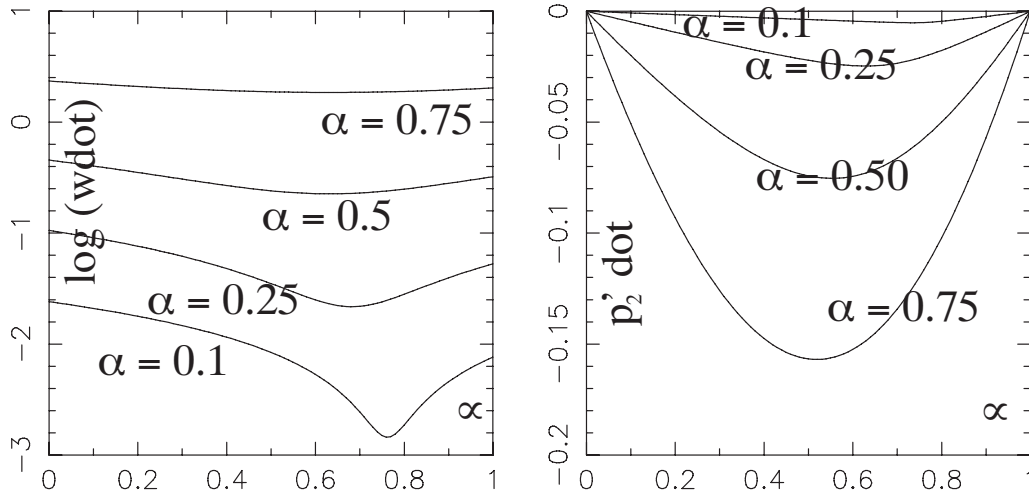


FIG. 3.8: Fréquences du système linéaire (3.13). A gauche : Logarithme (en base 10) de la valeur absolue de la fréquence \dot{w} versus le rapport de masses $\mu = m_1/(m_1 + m_2)$ pour quatre valeurs du rapport des demi-grands axes $\alpha = 0.1, 0.25, 0.50, 0.75$. La période correspondant à cette fréquence est la période T des trajectoires sur la sphère de Pauwels (cfr Eq. (3.16)). A droite : Valeur de la fréquence \dot{p}_2' . L'unité de fréquence de ces représentations est la fréquence képlérienne ($\sqrt{Gm_0/a_2^3}$) de la masse m_2 multipliée par le rapport de masse $(m_1 + m_2)/m_0$.

Les valeurs des fréquences de $w = p'_1 - p'_2$ et de p'_2 en fonction du rapport des masses μ sont données à la Figure 3.8 pour différentes valeurs du rapport des demi-grands axes α .

3.4 Résonance séculaire non-linéaire à modérées et hautes excentricités

[Michtchenko et Malhotra, 2004] ont montré récemment qu’il existe, à modérées et hautes excentricités, une *résonance séculaire non-linéaire* entre les mouvements des péricentres de deux planètes d’un même système dont les orbites sont coplanaires. Le qualificatif “non-linéaire” signifie que cette résonance n’est pas présente à faibles excentricités et ne peut donc pas être décelée par l’approche linéaire que constitue le problème de Laplace-Lagrange (cfr Eq. (3.11)). Leurs résultats sont obtenus par une approche semi-numérique (cfr Section 1.4.2). Les reproduire au moins partiellement constitue un défi pour notre approche analytique.

Bien sûr, le développement en excentricités limité à l’ordre 12 ne permet pas de s’attaquer à des excentricités trop élevées, mais, comme le montreront les Figures 3.9, 3.10 et 3.11, la modélisation analytique permet de détecter et de décrire précisément la résonance séculaire non-linéaire se produisant à excentricités modérées. Dans ce dernier cas, l’approche analytique permet une analyse beaucoup plus facile que celle effectuée à partir d’intégrations numériques. En effet, l’Hamiltonien (3.9) et ses dérivées sont des fonctions des coordonnées sphériques (ϕ, v) ; les équilibres sont simplement les racines d’une fonction polynômiale ($\partial\mathcal{K}^*/\partial\phi$), l’autre équation hamiltonienne du problème réduit à un degré de liberté ($\partial\mathcal{K}^*/\partial v$) exigeant que $v = 0$ ou $v = \pi$. Ces racines peuvent facilement être calculées par une méthode itérative, comme celle de Newton-Raphson. Il est ensuite aisé de conclure à l’apparition d’une zone de résonance supplémentaire lorsque le nombre d’équilibres est supérieur à deux (les deux pôles dynamiques de la Section 3.2).

Dans cette section, nous choisissons de nous focaliser dans un premier temps sur la représentation des sphères de Pauwels afin de parvenir à une vue globale des modifications qui sont causées par l’apparition de cette zone de résonance séculaire non-linéaire. Comme précédemment, les trajectoires sont les courbes de niveau de \mathcal{K}^* , et les valeurs maximales et minimales des excentricités le long d’une trajectoire sont facilement calculables.

Les Figures 3.9 et 3.10 montrent l’évolution de l’espace de phase lorsque le paramètre U augmente, dans le cas particulier $\alpha = 0.166$ et $\mu = 0.5$. Pour $U = 0.05$ (Figure 3.9, graphes supérieurs), le pôle dynamique “austral” (localisé en $v = \pi$, correspondant à l’anti-alignement des péricentres) se rapproche de l’équateur de la sphère plus rapidement que le pôle dynamique “septentrional” (localisé en $v = 0$, correspondant à l’alignement des péricentres). Remarquons également que les courbes de niveau sont plus déformées que dans le cas d’excentricités plus faibles (ou, de façon équivalente, dans le cas d’une valeur de U moins élevée).

Un peu avant que $U = 0.12$, des courbes de niveau entourant un troisième équilibre stable

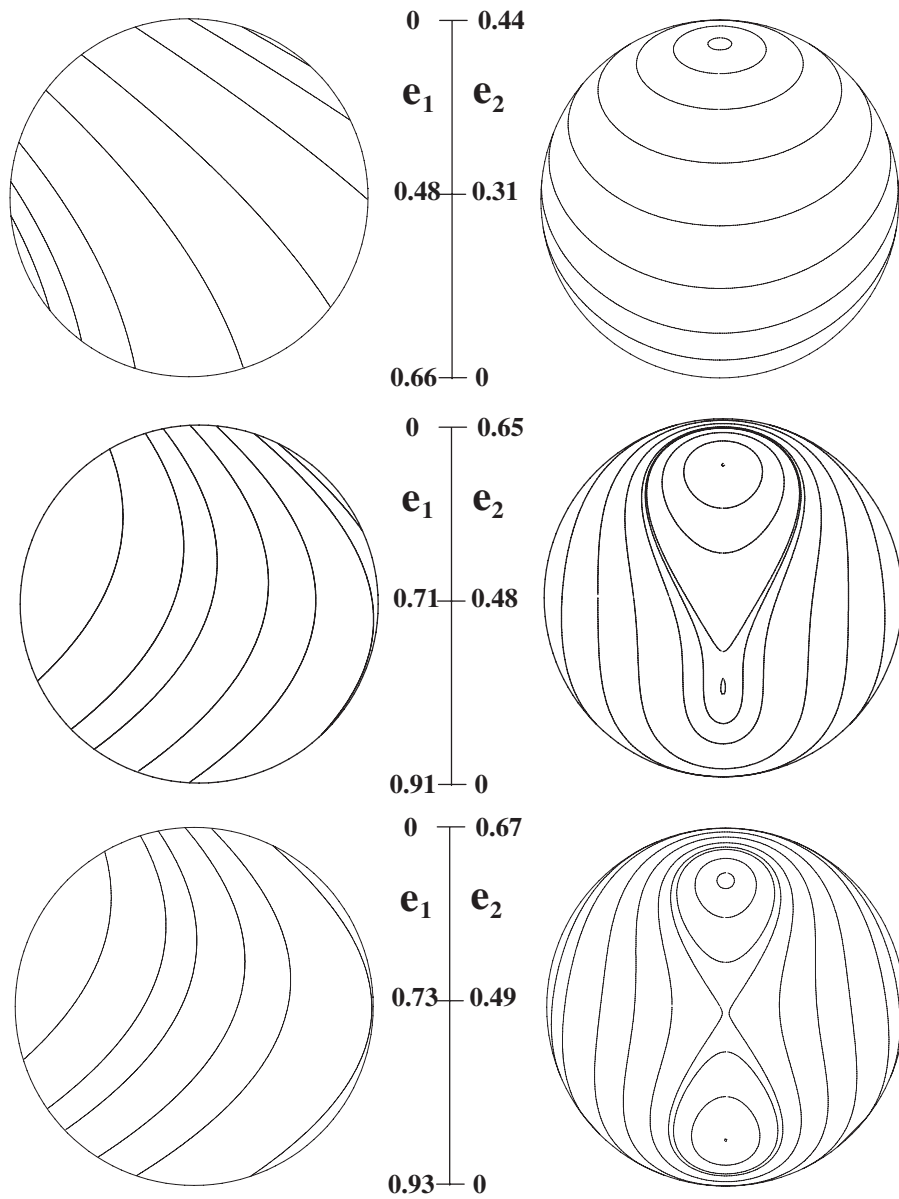


FIG. 3.9: Projections des sphères de Pauwels, pour $\alpha = 0.166$ et $m_1/m_2 = 1$, sur les plans $[x, z]$ (à gauche) et $[y, z]$ (à droite). Les valeurs croissantes de U considérées sont (de haut en bas) $U = 0.05, 0.12, 0.13$. La résonance séculaire non-linéaire (apparition de deux équilibres supplémentaires) naît un peu avant $U = 0.12$ et est bien visible lorsque $U = 0.13$. Les échelles graduées indiquent les valeurs des excentricités aux pôles géométriques et aux équateurs des sphères.

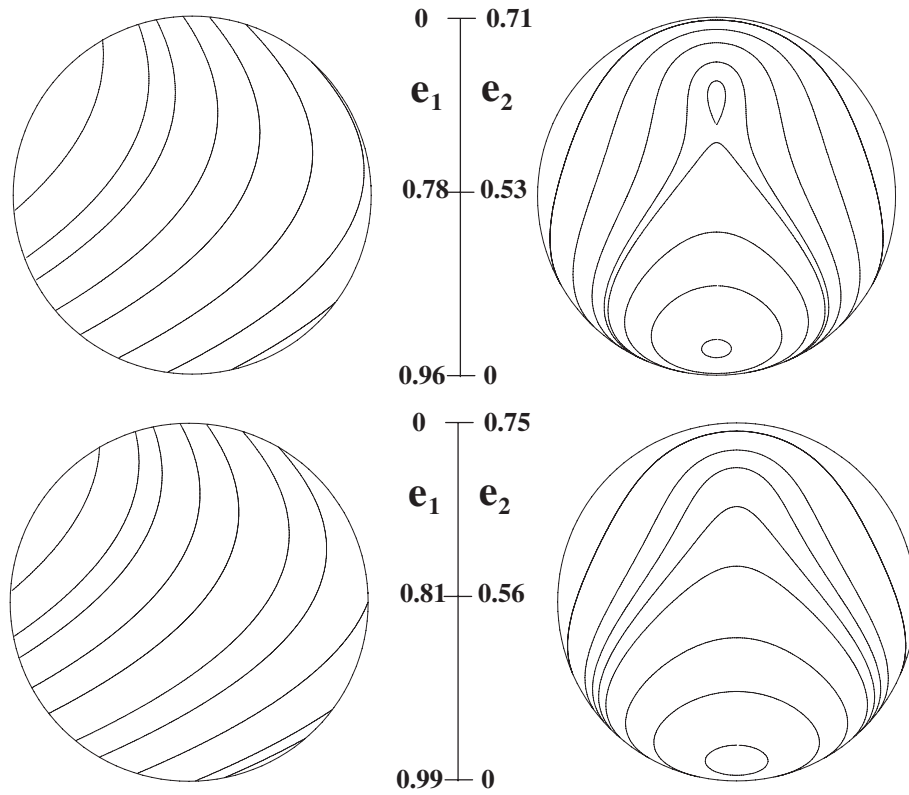


FIG. 3.10: Mêmes représentations qu'à la Figure 3.9 pour deux niveaux d'excentricités supérieurs $U = 0.15$ (*au-dessus*) et $U = 0.17$ (*en dessous*). La résonance séculaire non-linéaire disparaît un peu après $U = 0.15$.

(également situé en $v = 0$) sont créées. Un équilibre instable génère deux orbites homocliniques qui divisent la sphère en trois domaines associés chacun à un équilibre stable. Pour de plus grandes valeurs de U , la taille des domaines entourant les deux équilibres stables situés en $v = 0$ s'équilibre (graphes inférieurs de la Figure 3.9 pour lesquels $U = 0.13$).

Comme le montrent les graphes supérieurs de la Figure 3.10 associés à $U = 0.15$, le domaine entourant l'équilibre stable septentrional continue de se rétrécir. Des valeurs légèrement supérieures de U voient les équilibres stable et instable de l'hémisphère nord de la sphère de Pauwels fusionner et disparaître. La topologie de l'espace de phase qui en résulte est montrée au bas de la Figure 3.10 ($U = 0.17$). Elle est essentiellement la même que celle précédant l'apparition du troisième équilibre stable. La sphère n'est plus divisée par des orbites homocliniques. Le pôle dynamique septentrional a disparu, le pôle dynamique austral a migré dans l'hémisphère nord (toujours en $v = \pi$), devenant ainsi pôle dynamique septentrional. Le nouvel équilibre occupe une position proche du pôle géométrique austral en $v = 0$ (c'est-à-dire $e_2 \approx 0$) et joue

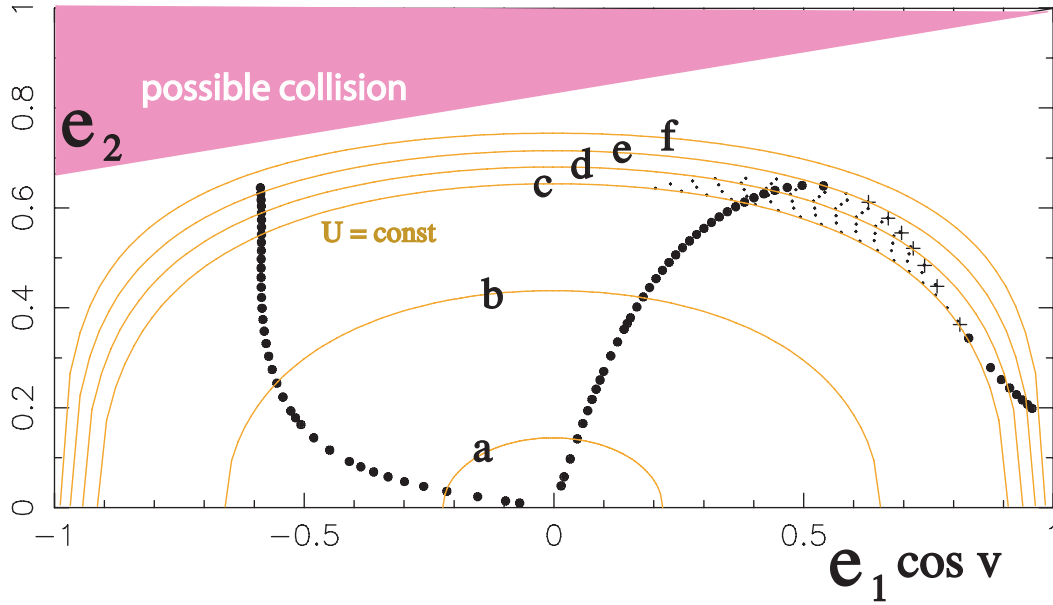


FIG. 3.11: Position des équilibres des sphères de Pauwels des Figures 3.9 et 3.10 ($\alpha = 0.166$ et $m_1/m_2 = 1$). Les courbes $U = cste$ sont pourvues des labels (a) à (f) pour indiquer les niveaux $U = 0.005, 0.05, 0.12, 0.13, 0.15, 0.17$ respectivement. La partie droite du plan (où $\cos v \geq 1$) est à comparer avec le graphe inférieur gauche de la Figure 8 de [Michtchenko et Malhotra, 2004].

à présent le rôle de pôle dynamique austral. Cela signifie que, comme c'était le cas pour des valeurs peu élevées de U , le système est à nouveau organisé autour de deux pôles dynamiques, un en $v = 0$ (pour lequel les lignes des apsides sont alignées) et l'autre en $v = \pi$ (pour lequel les lignes des apsides sont anti-alignées).

La Figure 3.11 fait l'inventaire des positions (excentricité de la planète intérieure en abscisse, celle de la planète extérieure en ordonnée) des différents équilibres localisés sur le cercle $y = 0$ dans les représentations sphériques précédentes ($\alpha = 0.166$ et $\mu = 0.5$). Afin de prendre également en compte le positionnement des équilibres sur la sphère, nous attribuons une valeur négative à e_1 lorsqu'un équilibre est situé en x négatif ou de façon équivalente en $v = \pi$. Ces équilibres sont calculés par annulation des équations hamiltoniennes grâce à l'approche de Newton-Raphson évoquée en début de section. Les courbes $U = cste$ sont dessinées dans le plan (e_1, e_2) pour chacune des valeurs de U considérées dans les Figures 3.9 et 3.10. Chaque courbe $U = cste$ correspond à une sphère de Pauwels, le nombre d'équilibres sur la courbe représentant le nombre d'équilibres présents sur la sphère $U = cste$.

Afin de s'assurer que les orbites des deux planètes ne se croisent pas, la limite supérieure du domaine de non-collision des orbites est également dessinée. Les conditions géométriques assurant une telle situation sont les suivantes :

$$a_1(1 - e_1) \leq a_2(1 - e_2) \text{ et } a_1(1 + e_1) \leq a_2(1 - e_2), \quad (3.17)$$

la première imposant que la distance au péricentre de la planète m_1 soit inférieure à celle de la planète m_2 et valable pour $v = 0$; la seconde imposant que la distance à l'apocentre de m_1

soit inférieure à la distance au péricentre de m_2 et valable pour $v = \pi$ (c'est-à-dire lorsque l'apocentre de m_1 est aligné avec le péricentre de m_2).

Les équilibres stables sont figurés par les points les plus épais. Pour de petites valeurs de U , ils représentent les deux familles d'orbites périodiques stables (correspondant à l'alignement et l'anti-alignement des lignes des apsides des deux planètes) bien connues de la théorie de Laplace-Lagrange. Entre $U = 0.12$ et $U = 0.15$, ils sont au nombre de trois. Les croix indiquent la position des équilibres instables responsables des trajectoires homocliniques qui divisent les sphères en trois domaines distincts. Enfin, les points plus fins montrent l'étendue de la résonance séculaire non-linéaire. Cette zone est caractérisée, pour un niveau fixé de U , par des valeurs de l'Hamiltonien inférieures à celle de l'équilibre instable correspondant à un maximum local. La partie droite de la Figure 3.11 reproduit presque exactement le graphe inférieur gauche de la Figure 8 de [Michtchenko et Malhotra, 2004].

[Michtchenko et Malhotra, 2004] ont étudié la présence de cette zone de résonance supplémentaire pour différentes valeurs des rapports des masses et des demi-grands axes et ont montré qu'elle n'apparaît pas pour tous les rapports. De plus, nous pouvons réaliser le même genre de graphe que celui de la Figure 3.11 pour les différents systèmes de deux planètes actuellement détectés et repris à la Table 1.2. Aucun de ces systèmes n'est situé dans la zone de résonance séculaire non-linéaire, ce qui s'explique par le fait que les excentricités de leurs planètes ne sont pas assez élevées que pour atteindre cette zone de résonance (lorsqu'elle existe).

Chapitre 4

Comportement séculaire des systèmes extrasolaires supposés coplanaires

L'approche géométrique menée au chapitre précédent nous a fourni les principales informations quant au comportement à long terme des systèmes extrasolaires supposés coplanaires, plus précisément les valeurs extrémales atteintes par les excentricités lors de leur oscillation séculaire, la libration ou circulation de la différence angulaire des lignes des apsides et l'appartenance ou non à une résonance séculaire non-linéaire. Une dernière information permettant de reproduire l'évolution temporelle d'un système extrasolaire fait toutefois défaut à ce stade : la fréquence (non-linéaire) de ces oscillations séculaires.

Cette dernière information nécessite la mise en oeuvre d'une technique de perturbation par transformées de Lie, et ce dans l'optique d'introduire des variables angle-action pour l'Hamiltonien du problème coplaire séculaire à deux dimensions (et non seulement pour son approximation linéaire comme cela a déjà été réalisé à la Section 3.3). Les Sections 4.1, 4.2 et 4.3 décrivent les différentes transformations à effectuer dans ce but. L'objectif est double : trouver une expression analytique des fréquences non-linéaires du problème et représenter les évolutions temporelles des excentricités et de la différence angulaire des lignes des apsides.

Précisons que ces évolutions temporelles sont réalisées grâce à la connaissance des différents éléments orbitaux sous forme de fonctions explicites du temps, et non par une intégration numérique des équations hamiltoniennes. C'est pourquoi nous pouvons qualifier notre approche de théorie totalement analytique.

Les périodes du mouvement, quant à elles, ne dépendent pas uniquement des rapports des demi-grands axes et des masses mais également des valeurs individuelles de ces quantités et, par conséquent, de l'inclinaison du plan orbital commun par rapport au plan du ciel. Les valeurs affichées sont obtenues en considérant l'hypothèse d'une inclinaison de 90° par rapport au plan du ciel, ce qui revient à considérer que les masses observées constituent les valeurs réelles des masses des planètes.

La Section 4.4 montre la précision des évolutions temporelles obtenues analytiquement dans le cas du système extrasolaire ν Andromède en comparaison avec celles obtenues par intégra-

tion numérique du problème non-moyenné par rapport aux courtes périodes (exécutée avec le logiciel SWIFT).

Pour ce même exosystème, nous étudions également, à la Section 4.5, la sensibilité des évolutions à long terme aux valeurs des différents éléments orbitaux osculateurs (valeurs initiales de e_1 , e_2 et $\Delta\varpi$). Au vu des incertitudes actuelles des données observationnelles, une telle étude est de circonstance et montre qu'une petite variation des données initiales peut produire des résultats très différents du point de vue des périodes du mouvement ou du comportement de la différence angulaire des lignes des apsides.

La Section 4.6 applique l'étude précédente aux systèmes extrasolaires du Chapitre 1, à savoir ν Andromède, HD 217107, HD 38529, HD 190360, HD 74156, HD 168443, HD 169830 et HD 12661. Ces systèmes sont suffisamment éloignés des résonances en moyen mouvement pour que leur dynamique à long terme puisse être décrite avec précision par notre théorie séculaire (cfr Section 5.2).

Finalement, une comparaison avec d'autres études (semi-)analytiques ou numériques portant sur la dynamique des systèmes extrasolaires supposés coplanaires est entreprise à la Section 4.7 et renforce l'idée selon laquelle notre théorie totalement analytique modélise avec précision l'évolution à long terme des systèmes extrasolaires supposés coplanaires et hors résonance en moyen mouvement.

4.1 Fréquences non-linéaires par transformées de Lie

A la Section 3.3, nous nous sommes intéressés au calcul des fréquences du problème de Laplace-Lagrange. De la transformation de découplage (3.12) ont découlé une formulation angle-action de l'Hamiltonien quadratique, \mathcal{L}' , et la connaissance explicite des deux fréquences de ce problème (associées aux variables après transformation (p'_i, P'_i)). Ces résultats sont mis en évidence par l'équation (3.13). Pour plus de facilité, nommons

$$a' = -n_2 \frac{(m_1 + m_2)}{m_0} [s + \sqrt{d^2 + c^2}] \quad \text{et} \quad b' = -n_2 \frac{(m_1 + m_2)}{m_0} [s - \sqrt{d^2 + c^2}] \quad (4.1)$$

les deux fréquences linéaires. Deux autres relations seront également utiles dans la suite : la conservation du déficit de moment angulaire $P_1 + P_2 = P'_1 + P'_2$ et une égalité additionnelle découlant de la définition même de la transformation de découplage $\sqrt{4P_1P_2} \sin(p_2 - p_1) = \sqrt{4P'_1P'_2} \sin(p'_2 - p'_1)$. Dans la suite, cette différence angulaire $p_1 - p_2$ est également notée $\Delta\varpi$ (en référence à la notation plus traditionnelle de la longitude du péricentre ϖ). Nous souhaitons à présent déterminer les fréquences du problème non-linéaire.

Une première étape consiste à formuler l'Hamiltonien non-linéaire limité à l'ordre 12 en excentricités dans les variables angle-action du problème quadratique :

$$\mathcal{K}' = a'P'_1 + b'P'_2 - \frac{Gm_1m_2}{a_2} \sum_{l,i_1,i_2} C_{i_1,i_2}^l E_1^{l+2i_1} E_2^{l+2i_2} \cos l(p'_1 - p'_2). \quad (4.2)$$

où les quantités E'_i sont liées aux moments P'_i par la même relation que les quantités E_i aux moments P_i , à savoir $E'_i = \sqrt{2P'_i/L_i}$. Elles sont toujours en relation avec les excentricités e_i mais d'une manière plus complexe. L'indice l varie de 0 à 6 et la somme $l + i_1 + i_2$ (demi-ordre en excentricités) varie de 1 à 6. La caractéristique de l'Hamiltonien selon laquelle la somme des variables angulaires est nulle, est conservée par la transformation de découplage. En effet, cette propriété est équivalente à la propriété d'invariance de la fonction hamiltonienne par translation de chacun des angles d'une quantité arbitraire γ . Par inspection des formules de découplage (3.12), on déduit qu'une translation des variables (p_1, p_2) par une constante γ est équivalente à la translation des variables (p'_1, p'_2) par la même constante, ce qui explique que l'Hamiltonien (4.2) possède encore la propriété de somme nulle par rapport à ses variables angulaires (p'_1, p'_2) .

Dans l'optique de développer une théorie séculaire non-linéaire, nous utilisons la théorie des perturbations basée sur les transformations de Lie, discutée à la Section 2.3 ([Hori, 1966], [Deprit, 1969]) et appliquée grâce à notre manipulateur de séries introduit quant à lui à la Section 2.4. Le but poursuivi est de moyenniser l'Hamiltonien (4.2) par rapport aux variables angulaires p'_i et d'introduire ainsi une formulation angle-action du problème non-linéaire.

Dans les notations du triangle de Lie représenté à la Section 2.3, le noyau $H_0^{(0)}$ est composé des termes d'ordre 2 en excentricités $a'P'_1 + b'P'_2$. Grâce à la transformation de découplage, ces termes sont indépendants des variables angulaires. L'Hamiltonien introduit en entrée dans le triangle de Lie est tel que les expressions $H_k^{(0)}$ le composant rassemblent les termes dont la somme des puissances des "excentricités" E'_i vaut $2(k+1)$; plus particulièrement $H_1^{(0)}$ est formé des termes d'ordre 4 en E'_i , $H_2^{(0)}$ des termes d'ordre 6, ... et finalement $H_5^{(0)}$ des termes d'ordre 12. Comme nous l'avons vu à la Table 3.1, la contribution des termes d'ordre 2 à 12 est décroissante (du moins dans le cas d'une convergence numérique acceptable). Cette décroissance est indispensable à l'utilisation de l'algorithme de Lie. Notons que le petit paramètre de la transformation est fixé, dans le cas présent, à $\epsilon = 1$.

A chaque ordre, nous sommes confrontés à l'équation homologique suivante ($\tilde{H}_0^{(k)}$ représente une quantité connue, $H_0^{(k)}$ est un des termes de l'Hamiltonien moyenné dont on cherche l'expression) :

$$\tilde{H}_0^{(k)} - H_0^{(k)} = - \left(H_0^{(0)}; \mathcal{W}_k \right) = a' \frac{\partial \mathcal{W}_k}{\partial p'_1} + b' \frac{\partial \mathcal{W}_k}{\partial p'_2}, \quad (4.3)$$

la dernière égalité découlant du fait que $H_0^{(0)}$ est fonction des moments P'_1 et P'_2 uniquement. Tous les termes de l'Hamiltonien sont ainsi intégrés pour former le générateur de la transformation, à l'exception de ceux qui créent des problèmes de "petits dénominateurs". Ces derniers forment quant à eux l'Hamiltonien moyenné. Ainsi la k -ème composante du générateur s'écrit

$$\mathcal{W}_k = - \frac{Gm_1 m_2}{a_2} \sum_{\substack{l+i_1+i_2=k+1 \\ l(a'-b') \neq 0}} \frac{C_{i_1, i_2}^l E_1^{l+2i_1} E_2^{l+2i_2} \sin l(p'_1 - p'_2)}{l(a' - b')}. \quad (4.4)$$

Seule une valeur nulle de l'indice l pose un problème de petits dénominateurs. En effet, la Figure 3.8 (graphe de gauche) a montré que la différence des fréquences linéaires n'est jamais

très proche de zéro quels que soient les rapports des demi-grands axes et des masses considérés. L'Hamiltonien moyenné $\bar{\mathcal{K}}' = \sum_k H_0^{(k)}$ est ainsi composé uniquement des termes indépendant des variables angulaires. En d'autres termes, nous obtenons, comme souhaité, une formulation angle-action du problème non-linéaire :

$$\bar{\mathcal{K}}' = -\frac{Gm_1m_2}{a_2} \sum_{i_1, i_2} D'_{i_1, i_2} \bar{E}'_1{}^{2i_1} \bar{E}'_2{}^{2i_2}. \quad (4.5)$$

Les coefficients D'_{i_1, i_2} dépendent du rapport des demi-grands axes α et de celui des masses μ . Les constantes \bar{E}'_i désignent les valeurs des moments moyennés par rapport au mouvement séculaire. Nous verrons à la Section 4.2 que ces valeurs peuvent être calculées à partir des éléments orbitaux osculateurs (excentricités et différence angulaire des périapses), en implémentant l'inverse de la transformation de Lie au moyen de l'algorithme de l'inverse [Henrard, 1973].

Les équations du mouvement associées à $\bar{\mathcal{K}}'$ sont

$$\dot{p}'_1 = \frac{\partial \bar{\mathcal{K}}'}{\partial P'_1} \quad \text{et} \quad \dot{p}'_2 = \frac{\partial \bar{\mathcal{K}}'}{\partial P'_2}. \quad (4.6)$$

Elles mènent à l'expression suivante des deux fréquences

$$\begin{aligned} \dot{p}'_1 &= -\frac{(1-\mu)}{\sqrt{\alpha}} \sum_{i_1, i_2} 2i_1 D'_{i_1, i_2} \bar{E}'_1{}^{2(i_1-1)} \bar{E}'_2{}^{2i_2} \\ \dot{p}'_2 &= -\mu \sum_{i_1, i_2} 2i_2 D'_{i_1, i_2} \bar{E}'_1{}^{2i_1} \bar{E}'_2{}^{2(i_2-1)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

L'unité de fréquence est, comme précédemment, la fréquence képlérienne de la masse m_2 ($n_2 = \sqrt{Gm_0/a_2^3}$) multipliée par le rapport des masses $(m_1 + m_2)/m_0$. Contrairement à l'étude de l'espace de phase menée au chapitre précédent (en particulier les valeurs extrémales des excentricités et l'amplitude maximale de libration de la différence angulaire des périapses $\Delta\varpi$), l'étude des fréquences (linéaires ou non-linéaires) dépend cette fois de la valeur de l'inclinaison du plan orbital commun par rapport au plan du ciel. Les masses observées $m_k \sin i_k$ constituent une limite inférieure aux masses réelles des exoplanètes, l'égalité entre masse observée et masse réelle n'étant valable qu'en cas d'inclinaison i_k de 90° . En conséquence, les valeurs des fréquences (4.7) calculées pour les masses observées actuelles ne sont que des fréquences minimales possibles. Il en découle logiquement que les périodes correspondant à ces fréquences sont, dans l'état actuel des découvertes, les valeurs maximales possibles sous l'hypothèse d'un système de planètes coplanaires.

Il est important d'insister sur le fait que les variables (p_i, P_i) avant la transformation de découplage et (p'_i, P'_i) après cette transformation n'ont plus la même signification. La fréquence \dot{p}'_i ne représente donc pas la fréquence du mouvement de la longitude du péricentre de la masse m_i . Cependant, la relation $\sqrt{4P_1P_2} \sin(p_2 - p_1) = \sqrt{4P'_1P'_2} \sin(p'_2 - p'_1)$ montre que la différence des angles avant et après transformation possède la même fréquence. En outre, le générateur de la moyennisation de Lie dépend uniquement de la différence angulaire $p'_1 - p'_2$ et non des angles

pris individuellement. Par conséquent, la fréquence de la différence angulaire des périapses $p_1 - p_2$ est la fréquence $\dot{p}'_1 - \dot{p}'_2$.

La période correspondante vaut

$$T = \frac{m_0 T_2}{(\dot{p}'_1 - \dot{p}'_2)(m_1 + m_2)}, \quad (4.8)$$

où T_2 est la période képlérienne de la masse m_2 . Comme expliqué précédemment, cette expression dépend de la somme des masses (et donc de l'inclinaison du plan orbital par rapport au plan du ciel) et non de leur rapport. La période de la différence angulaire des lignes des apsides est aussi fonction des excentricités moyennées \bar{E}'_i et du rapport des demi-grands axes intervenant au travers des coefficients D'_{i_1, i_2} .

Une autre utilité de l'algorithme de Lie direct est de fournir une expression des excentricités et de la différence angulaire des lignes des apsides sous forme de fonctions temporelles des éléments moyennés. Il s'agit alors d'opérer sur les variables la même transformation de Lie que celle utilisée pour moyenniser l'Hamiltonien. En effet, il faut tenir compte du fait que, pour les variables, le résultat est inversé : si l'on souhaite une formulation des variables non-moyennées comme fonction des variables moyennées, il faut utiliser l'algorithme de Lie direct décrit précédemment ; si l'on désire connaître l'expression des variables moyennées comme fonction des variables non-moyennées, il est nécessaire d'utiliser l'algorithme de Lie inverse [Henrard, 1973] explicité à la section suivante. Dans les deux cas, les transformations sont effectuées à l'aide du générateur calculé lors de la moyennisation de l'Hamiltonien.

Dès lors, les expressions de e'_1 , e'_2 et $p'_1 - p'_2$ sous forme de fonctions temporelles des éléments moyennés sont obtenues par l'application du triangle de Lie direct. Les variables angulaires dépendent explicitement du temps par la relation

$$\bar{p}'_1 - \bar{p}'_2 = \frac{2\pi}{T}t + \phi, \quad (4.9)$$

où ϕ est le déphasage à prendre en compte de sorte qu'en $t = 0$ on ait bien la valeur initiale du paramètre orbital considéré. Finalement, afin de se ramener aux variables $(e_1, e_2, p_1 - p_2)$, il faut encore appliquer la transformation de découplage (3.12). Nous obtenons ainsi une formulation totalement analytique de chacun des éléments orbitaux en fonction du temps, chaque fonction représentant le comportement à long terme moyenné par rapport aux courtes périodes.

4.2 Éléments moyens par l'algorithme inverse

Il nous reste à calculer les valeurs moyennées \bar{E}'_1 et \bar{E}'_2 , nécessaires au calcul des fréquences \dot{p}'_1 et \dot{p}'_2 (cfr Eq. (4.7)). Comme cela a été mentionné précédemment, il faut, pour le calcul des variables moyennées, considérer le cheminement inverse de celui parcouru pour la moyennisation de l'Hamiltonien. Ainsi, deux transformations successives doivent être mises en oeuvre : une transformation de découplage semblable à (3.12) mais qui correspond à la rotation inverse (d'angle $-\beta$) et une transformation de Lie inverse. L'algorithme de cette dernière est exposé

$$\begin{array}{ccccccc}
g_0 & \Leftarrow & f_0 & & & & \\
& & \downarrow & & & & \\
g_1 & \Leftarrow & f_{1,0} & f_1 & & & \\
& & \downarrow & \downarrow & & & \\
g_2 & \Leftarrow & f_{2,0} & f_{1,1} & f_2 & & \\
& & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
g_3 & \Leftarrow & f_{3,0} & f_{2,1} & f_{1,2} & f_3 & \\
& & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
g_4 & \Leftarrow & f_{4,0} & f_{3,1} & f_{2,2} & f_{1,3} & f_4 \\
& & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
g_5 & \Leftarrow & f_{5,0} & f_{4,1} & f_{3,2} & f_{2,3} & f_{1,4} & f_5
\end{array}$$

TAB. 4.1: Triangle de l'algorithme de Lie inverse

dans [Henrard, 1973]. Nous allons brièvement en rappeler les idées principales.

L'algorithme de Lie direct présenté à la Section 2.3 n'est pas aisément inversible dans le sens où, connaissant la fonction obtenue "en sortie" (diagonale du triangle), il est difficile de retrouver la fonction "d'entrée" (colonne de gauche). L'algorithme de Lie inverse permet d'effectuer plus facilement cette inversion puisqu'il est basé sur une simplification du triangle, comme le montre la Table 4.1. La fonction connue est placée sur la diagonale (f_i) et les termes g_i constituent l'expression que l'on recherche. Les opérations indiquées par les flèches peuvent être résumées par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
f_{0,j} &= f_j \\
f_{i,j} &= - \sum_{k=1}^i \binom{k-1}{i-1} (f_{i-k,j} ; \mathcal{W}_k) \quad (i \neq 0) \\
g_n &= \sum_{j=0}^n \binom{j}{n} f_{j,n-j} .
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Appliquer cet algorithme avec comme fonctions "en entrée" les variables (p'_i, P'_i) permet d'obtenir une formulation des variables moyennées (\bar{p}'_i, \bar{P}'_i) en fonction des non-moyennées. Le générateur de cette transformation est le même que celui qui a servi à moyenniser l'Hamiltonien.

4.3 Synthèse des différentes transformations

Avant d'appliquer notre théorie de moyennisation aux systèmes extrasolaires, il nous semble judicieux de reprendre schématiquement les différentes transformations effectuées dans les Sections 4.1 et 4.2.

La moyennisation de l'Hamiltonien par rapport aux variables angulaires p_i s'opère de la façon suivante :

$$\mathcal{K}(p_i, P_i) \xrightarrow{\text{rot}(\beta)} \mathcal{K}'(p'_i, P'_i) \xrightarrow{\text{Lie direct}} \bar{\mathcal{K}}'(_, \bar{P}'_i).$$

Cette dernière moyennisation fournit le générateur \mathcal{W} qui sera utilisé dans toutes les transformations de Lie direct ou inverse appliquées aux variables.

Point de vue des variables, il faut considérer le cheminement inverse pour obtenir les valeurs des variables moyennées (valeurs nécessaires au calcul des fréquences), c'est-à-dire :

$$(p_i, P_i) \xrightarrow{\text{rot}(-\beta)} (p'_i, P'_i) \xrightarrow{\text{Lie inverse}} (\bar{p}'_i, \bar{P}'_i).$$

Pour exprimer les variations temporelles des différents éléments orbitaux, on peut appliquer l'algorithme de Lie direct afin d'obtenir une expression des éléments orbitaux osculateurs en fonction des éléments orbitaux moyennés (les variables angulaires moyennées sont, grâce à la connaissance des fréquences, des fonctions explicites du temps) :

$$(p_i, P_i) \xleftarrow{\text{rot}(\beta)} (p'_i, P'_i) \xleftarrow{\text{Lie direct}} (\bar{p}'_i, \bar{P}'_i).$$

Comme le montre la section suivante, ces transformations permettent de décrire avec précision la dynamique des systèmes extrasolaires. Contrairement au chapitre précédent, aucune intégration numérique des équations hamiltoniennes n'est nécessaire dans cette nouvelle analyse du problème ; notre approche peut, par conséquent, être qualifiée de *théorie totalement analytique*.

4.4 Précision de l'approche totalement analytique dans le cas du système ν Andromède

Appliquons à présent l'approche théorique que nous venons d'introduire au cas particulier des planètes c-d du système extrasolaire ν Andromède. Nous supposons ce système coplanaire et tel que $\sin i_1 = \sin i_2 = 1$ (inclinaison de 90° du plan orbital commun par rapport au plan du ciel), de sorte que les masses réelles correspondent aux masses observées de ce système. Nous adoptons la nouvelle paramétrisation de ν Andromède reprise à la Table 1.2 (2006b).

Avant d'entamer la discussion des résultats, la vérification de la convergence numérique des séries \mathcal{K} (3.6) et $\bar{\mathcal{K}}'$ (4.5) considérées respectivement aux éléments orbitaux osculateurs et moyennés du système ν Andromède s'impose. La contribution qu'apporte chaque ordre en excentricités (E_1 et E_2 pour l'Hamiltonien séculaire, \bar{E}'_1 et \bar{E}'_2 pour l'Hamiltonien séculaire moyenné), de l'ordre 2 à l'ordre 12, est reportée à la Table 4.2. Les deux convergences sont excellentes (contributions d'ordre 12 valant respectivement 10^{-10} et 10^{-9}), ce qui laisse à penser que notre approche analytique devrait représenter la dynamique séculaire de ce système avec une précision plus que suffisante.

A titre d'illustration, les termes des différentes séries \mathcal{K} (3.6), \mathcal{K}' (4.2), $\bar{\mathcal{K}}'$ (4.5) et \mathcal{W} (4.4) calculées dans le cas de l'exosystème ν Andromède (2006b) sont repris, respectivement, dans

TAB. 4.2: Convergence numérique des développements (3.6) (*deuxième colonne*) et (4.5) (*troisième colonne*) pour le système ν Andromède (2006b). Les deux dernières colonnes indiquent la valeur de l'amplitude maximale de libration de $\Delta\varpi$ ainsi que la valeur de la période d'oscillation pour une troncature de l'Hamiltonien à différents ordres. La notation (–) signifie que l'ordre 2 est caractérisé par une circulation de l'angle $\Delta\varpi$.

Ordre	\mathcal{K}	$\overline{\mathcal{K}}$	$\Delta\varpi$ (rad)	T (ans)
2	$4.1 \cdot 10^{-03}$	$3.9 \cdot 10^{-03}$	–	8006.9158
4	$1.6 \cdot 10^{-04}$	$2.7 \cdot 10^{-04}$	1.146915	7 418.9387
6	$5.2 \cdot 10^{-06}$	$8.4 \cdot 10^{-06}$	1.117414	7 353.3417
8	$1.6 \cdot 10^{-07}$	$-4.4 \cdot 10^{-07}$	1.114472	7 345.1880
10	$4.9 \cdot 10^{-09}$	$-8.6 \cdot 10^{-08}$	1.114219	7 344.2215
12	$1.7 \cdot 10^{-10}$	$-6.3 \cdot 10^{-09}$	1.114159	7 344.0434

les Tables D.1 à D.4 de l'Annexe D.

Au chapitre précédent, la représentation des courbes d'Hamiltonien constant sur l'espace de phase sphérique de Pauwels (obtenue par intégration numérique des équations différentielles) avait permis d'obtenir les informations suivantes : la différence angulaire des lignes des apsides $\Delta\varpi$ oscille autour de 0° avec une amplitude de libration d'environ 64° ; dans le même temps, les excentricités varient en sens opposés (e_1 croît de 0.02 à 0.28 tandis que e_2 décroît de 0.28 à 0.23 (cfr Table 3.3)).

Les mêmes résultats peuvent être obtenus par l'approche totalement analytique qui permet également de calculer facilement la valeur de la période (non-linéaire) d'oscillation au moyen des équations (4.7) et (4.8). En effet, l'inverse de la transformée de Lie nous permet de calculer les valeurs des excentricités moyennées $\bar{e}'_1 = 0.137$ et $\bar{e}'_2 = 0.268$. Le calcul des fréquences nécessite la connaissance des valeurs individuelles des masses des planètes ($m_1 = 1.98M_J$, $m_2 = 3.95M_J$) mais aussi de la masse de l'étoile ($m_0 = 1.27M_\odot$) et du demi-grand axe de la planète extérieure ($a_2 = 2.51$ UA). Les fréquences \dot{p}'_1 et \dot{p}'_2 valant respectivement -0.1387 et -0.03092 (dans l'unité de fréquence de l'équation (4.7)), la fréquence de la différence angulaire des lignes des apsides $\Delta\varpi$ est égale à -0.1078 , ce qui est équivalent à une période de $T = 7\,344$ ans.

L'algorithme de Lie direct est quant à lui utilisé pour exprimer les éléments e_1 , e_2 et $\Delta\varpi$ comme des fonctions des variables moyennées \bar{E}'_1 , \bar{E}'_2 et $\bar{p}'_1 - \bar{p}'_2$. Les quantités \bar{E}'_1 et \bar{E}'_2 étant constantes et la différence angulaire pouvant s'exprimer $\bar{p}'_1 - \bar{p}'_2 = nt + \phi$ avec $n = \frac{2\pi}{T}$ (cfr Eq. (4.9)), la Figure 4.1 reproduit les variations temporelles de ces fonctions. Nous retrouvons les mêmes résultats que ceux obtenus au chapitre précédent. L'excentricité de la planète extérieure subit de petites variations en comparaison avec celle de la planète intérieure qui atteint une orbite presque circulaire tous les 7 344 ans. Lors de cette même période, les lignes des apsides oscillent autour d'une configuration alignée.

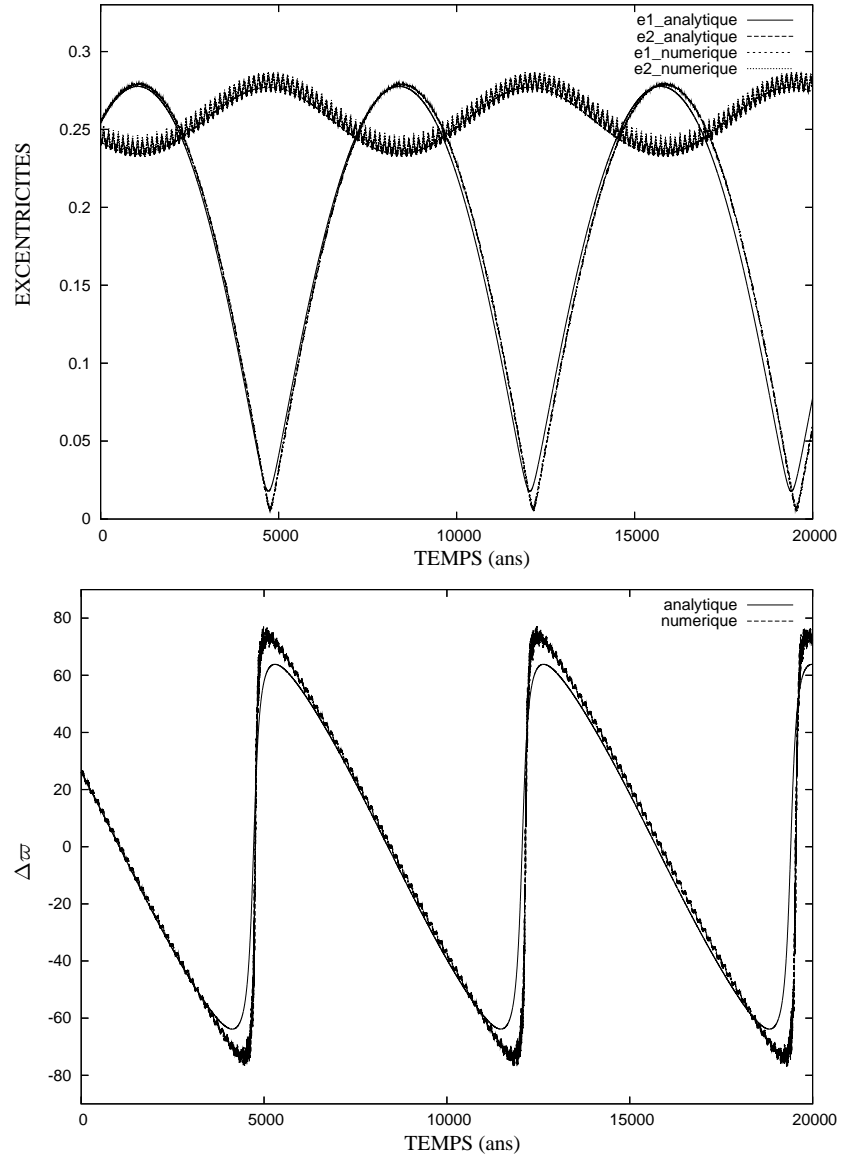


FIG. 4.1: Comparaison des évolutions à long terme des excentricités e_1 et e_2 (*au-dessus*) et de l'angle $\Delta\varpi$ (*en dessous*) du système ν Andromède (2006b), obtenues par notre théorie analytique et par intégration numérique du problème des trois corps réalisée avec le logiciel SWIFT (le passage de la planète extérieure au péricentre est pris comme condition initiale pour l'intégration numérique). La concordance entre les deux résultats est excellente.

Une comparaison de ces résultats avec ceux obtenus par intégration numérique du problème des trois corps des planètes c-d du système ν Andromède est également visible à la Figure 4.1. Les termes à courtes périodes éliminés dans notre processus de moyennisation sont bien sûr présents dans les tracés issus de l'intégration numérique du problème complet. Le passage de la planète extérieure au péricentre est pris comme condition initiale lors de l'intégration numérique. Ce choix de temps initial sera examiné plus en détail à la Section 5.4. L'intégration numérique a été réalisée avec le logiciel SWIFT développé par Duncan et Levison sur base de l'algorithme de [Wisdom et Holman, 1991]. La concordance de notre évolution analytique avec celle obtenue numériquement est évidente. Dès lors, ces observations nous incitent à penser que, dans le cas de systèmes extrasolaires (formés de deux planètes coplanaires dont les excentricités peuvent parfois être importantes) disposant d'une convergence numérique suffisante, le développement en excentricités de l'Hamiltonien tronqué à l'ordre 12 constitue une très bonne approximation de la dynamique séculaire de ces systèmes.

Etant donné les excentricités importantes de l'exosystème ν Andromède, il semble évident que la théorie linéaire de Laplace-Lagrange n'est pas à même de réaliser une approximation correcte du mouvement. Cette idée est confirmée lorsque nous regardons, dans la Table 4.2, les valeurs du second ordre en excentricités. En utilisant les valeurs des fréquences linéaires (cfr Eq. (4.1)), nous trouvons une période de 8 007 ans, ce qui est assez loin des 7 344 ans calculés avec l'approche d'ordre 12 en excentricités (soit une différence d'environ 10%). De même, la théorie linéaire prédit une circulation de l'angle $\Delta\varpi$, ce qui est nettement différent de l'oscillation de 64° mise en évidence aux ordres supérieurs. Cette limitation de la théorie de Laplace-Lagrange dans le cas de la nouvelle paramétrisation du système ν Andromède est également soulignée par [Veras et Armitage, 2007]. Cependant, ces auteurs ne poussent pas le développement à un ordre supérieur en excentricités qui serait suffisant et concluent alors hâtivement : “We conclude that LL secular theory, to any order, generally represents a poor barometer for predicting secular dynamics in extrasolar planetary systems, but does embody a useful tool for extracting an accurate long-term dynamical description of systems with small bodies and/or near-circular orbits”.

La Table 4.2 fournit également les valeurs de l'amplitude de libration de $\Delta\varpi$ et de la période T calculées aux ordres intermédiaires. La convergence numérique de ces résultats est flagrante et explique notre limitation à l'ordre 12 en excentricités. Remarquons toutefois que les ordres 8 et 10 constituent, en cas de très bonne convergence (comme pour ν Andromède par exemple), des approximations suffisantes des valeurs de l'ordre 12 (précision de l'ordre de l'année).

4.5 Sensibilité aux conditions initiales

Les incertitudes actuelles des données observationnelles sont grandes. Notre théorie analytique permet d'étudier aisément l'influence des valeurs des différents éléments orbitaux osculateurs (valeurs initiales $e_1(0)$, $e_2(0)$ et $\Delta\varpi(0)$) sur les résultats précédents.

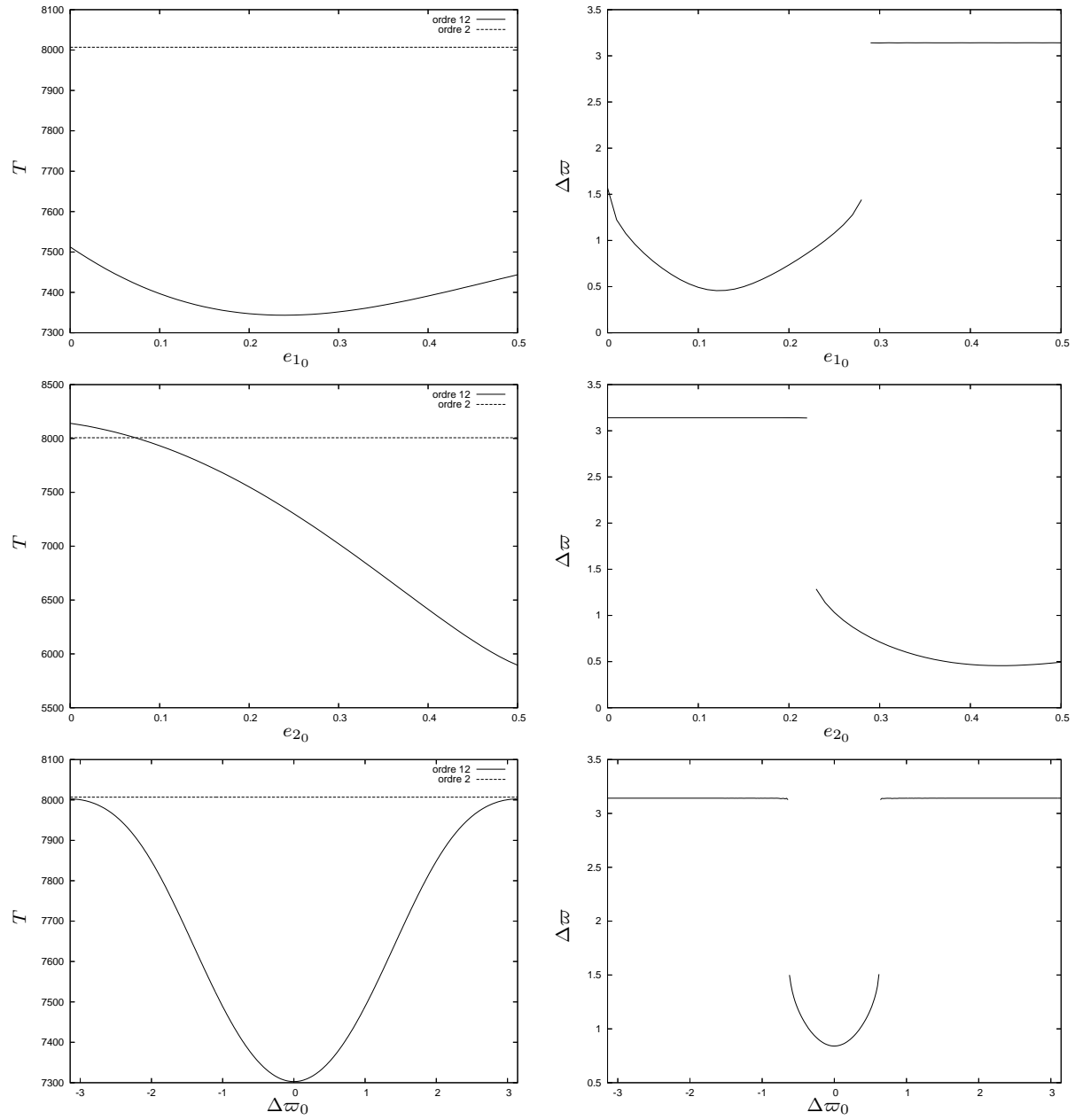


FIG. 4.2: Sensibilité, pour le système ν Andromède (2006b), de la période (à gauche) et de l'amplitude (à droite) d'oscillation de $\Delta\varpi$ aux éléments orbitaux osculateurs : l'excentricité de la planète intérieure $e_1(0)$ (au-dessus), celle de la planète extérieure $e_2(0)$ (au milieu) et la différence angulaire des lignes des apsides $\Delta\varpi(0)$ (en dessous). Les lignes en pointillés représentent les périodes de l'approche classique de Laplace-Lagrange. L'amplitude d'oscillation fixée à π indique une circulation de l'angle.

Dans un premier temps, nous nous intéressons à la sensibilité du système ν Andromède, aux valeurs initiales des excentricités. Nous nous centrons d'abord sur les changements causés par une variation de l'excentricité initiale de la planète intérieure $e_1(0)$. Tous les autres paramètres sont identiques à ceux affichés à la Table 1.2. Le graphe supérieur gauche de la Figure 4.2 montre l'évolution de la période d'oscillation induite par un tel changement de condition initiale. Le tracé en pointillés correspond à la période fournie par la théorie de Laplace-Lagrange. Sa valeur est constante, c'est-à-dire indépendante des excentricités, et au vu de l'écart qu'elle possède avec celle d'ordre 12 en excentricités, cette période constitue un pauvre baromètre quant à la prédiction de la dynamique d'un système extrasolaire. Nous avons limité l'étude à des excentricités initiales $e_1(0)$ inférieures à 0.5 car de plus grandes excentricités peuvent détruire la convergence numérique de notre approche. Pour chaque condition initiale représentée, la convergence numérique des séries hamiltoniennes est bien vérifiée.

Le graphe supérieur droit de la Figure 4.2 montre l'évolution de l'amplitude de libration de $\Delta\varpi$, toujours dans le cas d'une variation de l'excentricité initiale de la planète intérieure $e_1(0)$. L'amplitude d'oscillation fixée à π indique une circulation de l'angle. Ainsi pour de petites valeurs de l'excentricité $e_1(0)$, la différence angulaire des lignes des apsides oscille autour de l'alignement de ces mêmes lignes, tandis qu'elle circule pour de plus grandes excentricités initiales.

Les mêmes graphes peuvent être réalisés pour une variation de l'excentricité initiale de la planète extérieure $e_2(0)$. Les graphes au centre de la Figure 4.2 montrent que plus la valeur de $e_2(0)$ est grande, pire est l'approximation linéaire de la période T . L'influence de l'excentricité initiale $e_2(0)$ sur la période du mouvement semble plus grande que celle exercée par $e_1(0)$, à en juger par l'ordre de grandeur des variations encourues par la période T (de l'ordre de 10^2 ans pour une variation de $e_1(0)$ et de l'ordre de 10^3 ans pour $e_2(0)$). Nous voyons également l'angle $\Delta\varpi$ circuler dans le cas de petites excentricités initiales. La zone de libration de cet angle commence à une valeur de l'excentricité $e_2(0)$ proche de l'excentricité 0.242 du système ν Andromède.

Enfin, le bas de la Figure 4.2 s'attache à étudier les conséquences, sur la période T et sur le comportement de l'angle $\Delta\varpi$, d'une variation de la valeur initiale $\Delta\varpi(0)$ et indique une fois de plus qu'une petite variation des éléments orbitaux osculateurs peut produire des résultats très différents. Cette section a ainsi montré que la période et l'amplitude d'oscillation sont assez sensibles aux valeurs initiales des éléments orbitaux. Vu l'imprécision actuelle des observations et la grande sensibilité d'un système à ses éléments orbitaux, mieux vaut être prudent dans les affirmations sur la dynamique des exosystèmes, en particulier sur la libration ou la circulation de l'angle $\Delta\varpi$. Le système ν Andromède en est un exemple typique puisque, comme nous venons de le voir, pour des valeurs de $e_2(0)$ légèrement inférieures, cet angle serait en circulation.

4.6 Application à différents systèmes extrasolaires

La même étude que celle que nous venons d'effectuer pour le système ν Andromède peut être réalisée pour les autres systèmes extrasolaires de la Table 1.2 (supposés coplanaires). Outre les valeurs des seuls paramètres nécessaires à cette étude, la Table 4.3 contient la convergence numérique de l'Hamiltonien moyenné (4.5), les valeurs extrêmes atteintes par les excentricités au cours de leur variation, la période de cette variation et l'amplitude d'oscillation de la différence angulaire des lignes des apsides en cas de libration ; toutes ces informations sont obtenues au moyen de l'approche totalement analytique limitée à l'ordre 12 en excentricités. Suivent également les mêmes résultats calculés cette fois avec l'approche linéaire de Laplace-Lagrange.

Tous les systèmes extrasolaires considérés à la Table 4.3 jouissent d'une bonne convergence numérique de l'Hamiltonien moyenné $\bar{\mathcal{K}}$ (contributions d'ordre 12 variant entre 10^{-6} et 10^{-10}). Les systèmes HD 202206 et HD 108874 n'ont pas été considérés dans cette étude à cause de leur trop grande proximité à une résonance en moyen mouvement, comme le mettra en évidence le Chapitre 5. Parmi les autres exosystèmes, trois sont en résonance apsidale, à savoir ν Andromède et HD 190360 proches de l'alignement des lignes des apsides et HD 12661 proche de l'anti-alignement de ces mêmes lignes.

Les deux premières colonnes de la Table 4.3 montrent que les deux paramétrisations du système ν Andromède engendrent des dynamiques très similaires : libration de la différence angulaire des lignes des apsides autour de 0° , variations importantes de l'excentricité de la planète intérieure qui est sur une orbite presque circulaire tous les 7 869 (2006a) ou 7 344 (2006b) ans. Une différence notable cependant concerne les résultats obtenus par la théorie de Laplace-Lagrange : l'ancienne paramétrisation est caractérisée par une libration de $\Delta\varpi$ autour de 0° tandis que la nouvelle voit plutôt s'opérer une circulation de ce même angle. Cela montre une fois de plus que l'approche d'ordre 2 est insuffisante pour décrire la dynamique séculaire d'un système extrasolaire.

4.7 Comparaison avec d'autres études

Comme l'a montré le Chapitre 1, de nombreuses études portant sur la dynamique séculaire des systèmes extrasolaires non-résonants supposés coplanaires ont été entreprises ces dernières années, dont la plupart sont des travaux purement numériques ("n-body codes"). Certaines entreprennent une comparaison de leur résultat avec la théorie analytique linéaire de Laplace-Lagrange, souvent dans le but de souligner les limitations de cette dernière. Concernant les méthodes analytiques ou semi-analytiques, deux travaux sont consacrés à l'étude de la dynamique séculaire coplaire : l'approche de [Michtchenko et Malhotra, 2004] basée sur une moyennisation numérique des perturbations à courtes périodes et l'approche analytique de [Lee et Peale, 2003] centrée sur un développement de la perturbation limité à l'ordre α^3 ("*octupole-level secular theory*") et valable uniquement dans le cas de systèmes hiérarchiques (cfr Section 1.4.2 pour plus de précisions). Comme notre étude analytique du Chapitre 3, ces

TAB. 4.3: Convergence numérique du développement en série $\bar{\mathcal{K}}'$ et résultats décrivant la dynamique des différents systèmes extrasolaires de la Table 1.2 obtenus par notre théorie limitée à l'ordre 12 en excentricités (résultats non-linéaires) et celle limitée à l'ordre 2 (théorie de Laplace-Lagrange)

	v Andro 2006a	v Andro 2006b	HD 217107	HD 38529	HD 190360
α	0.328	0.331	0.017	0.035	0.033
μ	0.335	0.334	0.347	0.058	0.037
$e_1(0)$	0.28	0.254	0.132	0.29	0.01
$e_2(0)$	0.27	0.242	0.537	0.36	0.36
$\Delta\varpi(0)_{(\text{rad})}$	0.175	0.456	2.466	-1.274	0
a_2 (UA)	2.53	2.51	4.41	3.68	3.92
m_1 (M_J)	1.89	1.98	1.33	0.78	0.057
m_2 (M_J)	3.75	3.95	2.5	12.7	1.502
m_0 (M_\odot)	1.3	1.27	1.02	1.39	0.96
n	contribution d'ordre n à l'Hamiltonien $\bar{\mathcal{K}}'$ (4.5)				
2	$4.5 \cdot 10^{-03}$	$3.9 \cdot 10^{-03}$	$3.6 \cdot 10^{-05}$	$1.0 \cdot 10^{-04}$	$5.5 \cdot 10^{-05}$
4	$3.7 \cdot 10^{-04}$	$2.7 \cdot 10^{-04}$	$1.2 \cdot 10^{-05}$	$1.5 \cdot 10^{-05}$	$7.3 \cdot 10^{-06}$
6	$1.5 \cdot 10^{-05}$	$8.4 \cdot 10^{-06}$	$3.1 \cdot 10^{-06}$	$1.8 \cdot 10^{-06}$	$8.2 \cdot 10^{-07}$
8	$-4.8 \cdot 10^{-07}$	$-4.4 \cdot 10^{-07}$	$7.3 \cdot 10^{-07}$	$1.9 \cdot 10^{-07}$	$8.2 \cdot 10^{-08}$
10	$-1.5 \cdot 10^{-07}$	$-8.6 \cdot 10^{-08}$	$1.6 \cdot 10^{-07}$	$1.8 \cdot 10^{-08}$	$7.7 \cdot 10^{-09}$
12	$-1.4 \cdot 10^{-08}$	$-6.3 \cdot 10^{-09}$	$3.4 \cdot 10^{-08}$	$1.6 \cdot 10^{-09}$	$6.8 \cdot 10^{-10}$
	résultats non-linéaires				
min e_1	0.049	0.018	0.129	0.265	0.010
max e_1	0.284	0.278	0.164	0.304	0.024
min e_2	0.269	0.234	0.536	0.3599	0.360
max e_2	0.307	0.277	0.537	0.3602	0.360
	lib. (0)	lib. (0)	circ.	circ.	lib. (0)
n	-0.1083	-0.1078	-0.0016	-0.0054	-0.0053
$T_{(\text{ans})}$	7 869	7 344	1 563 924	119 841	963 248
ampl _(rad)	0.830	1.114	—	—	0.431
	résultats de Laplace-Lagrange				
min e_1	0.019	0.004	0.129	0.270	0.009
max e_1	0.284	0.274	0.155	0.301	0.020
min e_2	0.269	0.236	0.5366	0.3599	0.360
max e_2	0.308	0.277	0.5370	0.3602	0.360
	lib. (0)	circ.	circ.	circ.	lib. (0)
$T_{(\text{ans})}$	8 809	8 007	2 529 996	141 085	1 185 758
ampl _(rad)	1.103	—	—	—	0.350

	HD 74156	HD 168443	HD 169830	HD 12661
α	0.086	0.077	0.225	0.324
μ	0.232	0.307	0.416	0.594
$e_1(0)$	0.636	0.5286	0.31	0.35
$e_2(0)$	0.583	0.2125	0.33	0.2
$\Delta\varpi(0)$ (rad)	1.063	-1.881	1.815	-2.257
a_2 (UA)	3.4	3.91	3.6	2.56
m_1 (M_J)	1.86	8.02	2.88	2.3
m_2 (M_J)	6.17	18.1	4.04	1.57
m_0 (M_\odot)	1.05	0.96	1.4	1.07
n	contribution d'ordre n à l'Hamiltonien $\bar{\mathcal{K}}'$ (4.5)			
2	$2.1 \cdot 10^{-03}$	$8.1 \cdot 10^{-04}$	$5.1 \cdot 10^{-03}$	$9.4 \cdot 10^{-03}$
4	$9.1 \cdot 10^{-04}$	$-3.0 \cdot 10^{-06}$	$5.3 \cdot 10^{-04}$	$1.2 \cdot 10^{-03}$
6	$3.0 \cdot 10^{-04}$	$-1.6 \cdot 10^{-06}$	$1.4 \cdot 10^{-05}$	$2.6 \cdot 10^{-04}$
8	$7.9 \cdot 10^{-05}$	$-1.7 \cdot 10^{-07}$	$-1.3 \cdot 10^{-05}$	$5.0 \cdot 10^{-05}$
10	$1.5 \cdot 10^{-05}$	$-3.4 \cdot 10^{-08}$	$-5.0 \cdot 10^{-06}$	$7.2 \cdot 10^{-06}$
12	$3.9 \cdot 10^{-07}$	$-9.4 \cdot 10^{-09}$	$-1.0 \cdot 10^{-06}$	$-4.0 \cdot 10^{-07}$
	résultats non-linéaires			
min e_1	0.424	0.505	0.196	0.090
max e_1	0.723	0.570	0.526	0.386
min e_2	0.573	0.196	0.209	0.130
max e_2	0.599	0.220	0.358	0.366
	circ.	circ.	circ.	lib. (π)
n	-0.0177	-0.0080	-0.0363	-0.0801
T (ans)	47 333	37 860	33 693	14 313
ampl (rad)	—	—	—	1.078
	résultats de Laplace-Lagrange			
min e_1	0.547	0.514	0.225	0.188
max e_1	0.668	0.555	0.461	0.398
min e_2	0.580	0.203	0.261	0.092
max e_2	0.591	0.217	0.352	0.336
	circ.	circ.	circ.	lib. (π)
T (ans)	62 258	30 749	32 184	22 160
ampl (rad)	—	—	—	0.891

TAB. 4.4: Résultats concernant la dynamique séculaire de différents systèmes extrasolaires (supposés coplanaires) obtenus à partir de théories (semi-)analytiques ou numériques, recueillis dans les articles de [Michtchenko et Malhotra, 2004], [Lee et Peale, 2003] et [Ji et al., 2003]. La dernière colonne comprend les résultats de notre approche analytique limitée à l'ordre 12 en excentricités, obtenus en prenant en compte les mêmes éléments orbitaux osculateurs (cfr Table 4.5).

		(semi-)numérique	analytique
[Michtchenko et Malhotra, 2004] <i>v</i> Andromède	ampl _(rad) $T_{(ans)}$	lib. (0) 25° 7 100	lib. (0) 24.39° 6 785
[Lee et Peale, 2003] HD 168443	$T_{(ans)}$	numérique $\sim 18\,000$ octupole $\sim 18\,500$	18 350
[Ji et al., 2003] HD 12661	ampl _(rad) $T_{(ans)}$	lib. (π) 40° $\sim 12\,000$	lib. (π) 39.5° 13 388

deux travaux sont basés sur une réduction du problème à un seul degré de liberté. Dans cette section, nous désirons comparer leurs résultats avec ceux que produit notre développement en excentricités.

La Table 4.4 reprend la dynamique de quelques exosystèmes supposés coplanaires : *v* Andromède analysé par la théorie semi-analytique de [Michtchenko et Malhotra, 2004], HD 168443 par la théorie “octupole” de [Lee et Peale, 2003] et HD 12661 par l'intégration numérique de [Ji et al., 2003]. Les résultats présentés dans leur papier respectif sont regroupés dans la colonne de gauche. La colonne de droite rassemble les valeurs obtenues par notre modèle analytique en prenant en compte les mêmes éléments orbitaux osculateurs qui sont, quant à eux, retranscrits à la Table 4.5.

En ce qui concerne le système *v* Andromède, nous voyons que les résultats de notre développement en excentricités sont très proches de ceux de l'approche semi-numérique, surtout pour le comportement de la différence angulaire des périapses. Cette même observation peut être formulée dans le cas du système HD 12661. Les résultats de l'intégration numérique montrent, en effet, une amplitude de libration presque semblable pour les deux méthodes.

Concernant les périodes du mouvement, nous remarquons qu'elles sont en général bien approximées par notre approche analytique, même si une légère différence est notable. Cette différence est facilement explicable en ce sens où notre théorie analytique ne prend pas en compte

TAB. 4.5: Eléments orbitaux osculateurs considérés dans les travaux de [Michtchenko et Malhotra, 2004], [Lee et Peale, 2003] et [Ji et al., 2003]

α	μ	e_1	e_2	$\Delta\varpi$ (rad)	m_0 (M_\odot)	m_1 (M_J)	m_2 (M_J)	a_2 (UA)
ν Andro [Michtchenko et Malhotra, 2004]								
0.332	0.316	0.252	0.308	0	1.3	1.83	3.97	2.5
HD 168443 [Lee et Peale, 2003]								
0.1	0.31	0.53	0.2	-1.92	1.01	7.73	17.23	2.9
HD 12661 [Ji et al., 2003]								
0.322	0.594	0.35	0.2	~ -3.23	~ 1.07	2.3	1.57	2.557

l'influence des anomalies moyennes osculatrices sur le mouvement à long terme, contrairement aux travaux numériques. Ces dernières semblent influencer principalement la valeur de la période séculaire et n'intervenir que peu dans le comportement de l'angle $\Delta\varpi$. Cette différence entre modèles analytiques et modèles numériques est également mise en évidence par la théorie analytique de [Lee et Peale, 2003]. En effet, celle-ci fournit, dans le cas du système HD 168443, une valeur de la période supérieure d'environ 3% à la valeur obtenue par intégration numérique. Remarquons que l'écart entre analytique et numérique semble un peu moins important, pour cet exemple, dans le cas de notre modèle. L'influence des anomalies moyennes sur le comportement à long terme d'un système sera considérée plus en détail au Chapitre 5.

Chapitre 5

Proximité des systèmes extrasolaires aux résonances en moyen mouvement

Les chapitres précédents ont montré qu’une théorie séculaire analytique basée sur un développement limité en excentricités peut être appliquée avec succès aux systèmes extrasolaires non-résonants. Pour obtenir l’expression de l’Hamiltonien moyenné par rapport aux courtes périodes, nous nous sommes limités, à la Section 3.1, à une moyennisation “aux ciseaux”, c’est-à-dire à simplement retirer de l’Hamiltonien les termes qui dépendent des longitudes moyennes des planètes. Cela correspond à une moyennisation au premier ordre des masses. Une condition nécessaire à cette moyennisation est que le système ne soit pas en résonance en moyen mouvement. De plus, cette dernière fournit une mauvaise approximation dans le cas de systèmes trop proches d’une quelconque résonance en moyen mouvement. C’est le cas, par exemple, de la “grande inégalité” de Jupiter et Saturne dont les mouvements souffrent de perturbations importantes dues à la proximité de la résonance 5/2. Ainsi, le but de ce chapitre est de tester la proximité des différents systèmes extrasolaires actuellement découverts à une quelconque résonance en moyen mouvement, dans l’optique d’identifier ceux pouvant ou ne pouvant pas être traités par notre approche séculaire.

Pour ce faire, la Section 5.1 met en oeuvre une méthode de perturbation complète par transformées de Lie au premier ordre des masses. Pour les systèmes très proches d’une résonance définie par $k_1 n_1 - k_2 n_2 = 0$, la solution est dominée par des termes comprenant des combinaisons du type “ $k_1 \lambda_1 - k_2 \lambda_2$ ” (termes à longues périodes) et l’amplitude de ces termes donne une idée de la proximité à la résonance. Concrètement, nous nous intéressons aux termes qui contribuent significativement à la différence entre éléments orbitaux osculateurs et éléments orbitaux moyennés par rapport aux courtes périodes, de sorte à identifier les termes résonants et non-résonants les plus influents.

Ce test de proximité à une quelconque résonance en moyen mouvement est appliqué, à la Section 5.2, aux différents systèmes de la Table 1.2 et nous permet d’identifier trois catégories de systèmes : les systèmes éloignés de toute résonance en moyen mouvement, aussi appelés systèmes hiérarchiques (i.e. systèmes de la classe III), ceux qui ne sont que faiblement influencés

par une ou plusieurs résonances en moyen mouvement et enfin ceux de proximité trop grande à une résonance en moyen mouvement pour pouvoir être étudiés par une approche séculaire.

Une investigation plus complète de l'étendue de la zone de résonance 5/1 à proximité du système ν Andromède fait l'objet de la Section 5.3, où sont étudiés les changements de comportement induits par différentes valeurs initiales du demi-grand axe de la planète extérieure. Ces résultats sont présentés tant du point de vue de la grandeur des coefficients des termes résonants que d'un point de vue graphique où nous regardons l'adéquation entre les graphes obtenus par notre approche analytique et par une intégration numérique.

Enfin, la dernière section traite de l'influence des anomalies moyennes sur le comportement à long terme du système, influence dont nous ne tenons pas compte dans notre approche analytique moyennée au premier ordre des masses par rapport aux courtes périodes. Elle étudie également l'erreur commise en considérant, comme valeurs initiales de notre modèle analytique séculaire, les éléments orbitaux osculateurs et non leurs homologues moyennés au premier ordre des masses par rapport aux courtes périodes et montre que la limitation du modèle au premier ordre des masses ne permet pas de déterminer l'influence des anomalies moyennes sur le long terme.

5.1 Effets de la proximité à la résonance en moyen mouvement sur la moyennisation au premier ordre des masses

L'Hamiltonien séculaire considéré jusqu'à présent (cfr Eq. (3.6)) est obtenu simplement en retirant de l'Hamiltonien (3.5) les termes dépendant des longitudes moyennes des planètes, ce qui revient à effectuer une moyennisation "aux ciseaux" ou une moyennisation des termes non-séculaires au premier ordre des masses. Cette moyennisation n'est pas valable pour des systèmes trop proches d'une résonance en moyen mouvement. Nous nous intéressons dans les Sections 5.1, 5.2 et 5.3 à quantifier la proximité d'un système à une quelconque résonance en moyen mouvement et à ainsi identifier les systèmes extrasolaires pouvant ou ne pouvant pas être traités par cette approche séculaire du premier ordre des masses.

La proximité à une résonance en moyen mouvement est souvent étudiée à partir du rapport des fréquences $\frac{n_2}{n_1} = (\frac{a_1}{a_2})^{3/2}$, n_i étant le moyen mouvement de la masse m_i . Si ce rapport peut être approché par un nombre rationnel $\frac{p}{p+q}$ avec q petit, le système est alors proche d'une résonance en moyen mouvement d'ordre q et de degré p . Toute la difficulté de cette première étude réside dans la définition du terme "proche". En effet, nous montrerons le cas d'un système (HD 12661) dont le rapport des fréquences (0.1846) est très proche du rapport 2/11 (0.1818) et dont le comportement n'est pourtant que peu influencé par cette résonance. En effet, afin d'avoir une vue plus globale de l'influence exercée par une résonance en moyen mouvement, nous devons également prendre en compte l'importance des termes perturbateurs ou, autrement dit, de l'ordre q de la résonance. Plus l'ordre d'une résonance en moyen mouvement est élevé,

moins l'influence de cette résonance sur un système proche est importante. Dans la suite, nous cherchons à introduire un critère de proximité qui tiendra compte de ces deux aspects.

Pour introduire une telle étude, nous avons besoin de connaître le générateur W_1 de la moyennisation par rapport aux courtes périodes. Cela nécessite de mettre en oeuvre une théorie de perturbation par transformées de Lie au premier ordre des petites masses, selon le schéma introduit à la Section 2.3 (algorithme direct).

En prenant le petit paramètre de la transformation comme étant $\epsilon = \frac{m_1 m_2}{m_0^2}$, l'Hamiltonien (3.5) se réécrit

$$\mathcal{H} = -\frac{G^2 m_0^2 m_1^3}{2L_1^2} - \frac{G^2 m_0^2 m_2^3}{2L_2^2} - \epsilon \frac{G m_0^2}{a_2} \sum_{k, i_1, i_2, j_1, j_2} B_{i_1, i_2, j_1, j_2}^k E_1^{|j_1|+2i_1} E_2^{|j_2|+2i_2} \cos \Phi, \quad (5.1)$$

ce qui peut être synthétisé en $\mathcal{H} = H_0^{(0)} + \epsilon H_1^{(0)}$. Cette dernière formulation est introduite dans le triangle de Lie visant à éliminer les courtes périodes λ_i . Au premier ordre en ϵ , nous sommes confrontés à l'équation homologique

$$H_0^{(1)} = H_1^{(0)} + (H_0^{(0)}; W_1). \quad (5.2)$$

Comme $H_0^{(0)}$ ne dépend que de L_1 et L_2 , la valeur de la parenthèse de Poisson est facilement calculable :

$$(H_0^{(0)}; W_1) = -n_1 \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_1} - n_2 \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_2}, \quad (5.3)$$

où n_i est le moyen mouvement de la masse m_i , à savoir

$$n_i = \frac{G^2 m_0^2 m_i^3}{L_i^3} = \sqrt{\frac{G m_0}{a_i^3}}. \quad (5.4)$$

L'équation (5.2) devient

$$\begin{aligned} n_1 \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_1} + n_2 \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_2} &= H_1^{(0)} - H_0^{(1)} \\ &= -\frac{G m_0^2}{a_2} \sum_{k, i_1, i_2, j_1, j_2} B_{i_1, i_2, j_1, j_2}^k E_1^{|j_1|+2i_1} E_2^{|j_2|+2i_2} \cos \Phi - H_0^{(1)}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Tous les termes de l'Hamiltonien sont ainsi intégrés pour former le générateur de la transformation, à l'exception de ceux qui créent des problèmes de “petits dénominateurs”. Ces derniers forment, quant à eux, l'Hamiltonien moyenné. Ainsi, le générateur W_1 dépend des quotients $\frac{\sin \Phi}{n_1(k+j_1) - n_2(k+j_2)}$. Sous l'hypothèse de non-commensurabilité des n_i (ou plus exactement à condition que le système ne soit pas trop proche d'une résonance en moyen mouvement), les problèmes de “petits dénominateurs” ne se produisent que lorsque les coefficients des moyens mouvements n_i s'annulent simultanément, c'est-à-dire $k + j_1 = k + j_2 = 0$. L'Hamiltonien moyenné $H_0^{(0)} + \epsilon H_0^{(1)}$ est ainsi composé uniquement des termes indépendant des longitudes moyennes λ_i et s'écrit par conséquent :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}} &= H_0^{(0)} + \epsilon H_0^{(1)} \\ &= -\frac{G^2 m_0^2 m_1^3}{2\bar{L}_1^2} - \frac{G^2 m_0^2 m_2^3}{2\bar{L}_2^2} - \frac{G m_1 m_2}{\bar{a}_2} \sum_{k, i_1, i_2} B_{i_1, i_2, -k, -k}^k \bar{E}_1^{k+2i_1} \bar{E}_2^{k+2i_2} \cos k(\bar{p}_1 - \bar{p}_2), \end{aligned} \quad (5.6)$$

où $(-)$ représente la moyennisation des arguments par rapport aux courtes périodes. Les moments moyennés \bar{L}_i ($i = 1, 2$) sont constants (puisque les longitudes moyennes $\bar{\lambda}_i$ n'apparaissent plus dans l'Hamiltonien). Les deux premiers termes de l'expression (5.6) sont donc constants et peuvent être supprimés, l'Hamiltonien étant défini à une constante près. Cette expression est identique à celle de l'Hamiltonien séculaire (3.6) où les coefficients $B_{i_1, i_2, -k, -k}^k$ ont été renommés C_{i_1, i_2}^k et où l'on considérerait les valeurs des variables moyennées comme équivalentes aux valeurs osculatrices.

De plus, nous possédons à présent l'expression recherchée de la fonction génératrice (du premier ordre) :

$$W_1 = -\frac{Gm_1m_2}{a_2} \sum_{\substack{k, i_1, i_2, j_1, j_2 \\ j_1 \neq -k, j_2 \neq -k}} \frac{B_{i_1, i_2, j_1, j_2}^k E_1^{|j_1|+2i_1} E_2^{|j_2|+2i_2}}{n_1(k+j_1) - n_2(k+j_2)} \sin \Phi. \quad (5.7)$$

La Table 3.2 avait montré la différence considérable entre les nombres de termes inclus dans les Hamiltoniens (5.1) et (5.6). L'Hamiltonien moyenné par rapport aux courtes périodes ne possède que 84 termes, soit de l'ordre de 300 fois moins de termes que la série entière. Le générateur au premier ordre est donc composé des termes restants, c'est-à-dire environ 28 000 termes (dans le cas où les termes du type $k(\lambda_1 - \lambda_2)$ sont calculés jusqu'à $k = 15$).

La connaissance du générateur W_1 permet de décrire les effets de la perturbation au premier ordre des masses, en particulier ceux induits sur le comportement à long terme des excentricités. Pour ce faire, nous cherchons à évaluer l'expression suivante :

$$E_i^2 = \bar{E}_i^2 + \epsilon (E_i^2; W_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (5.8)$$

correspondant au premier ordre du triangle de Lie. Nous avons choisi de considérer dans cette dernière équation la quantité E_i^2 afin d'éviter d'avoir à traiter des exposants fractionnaires lors du calcul de cette expression. La parenthèse de Poisson se calcule facilement :

$$(E_i^2; W_1) = [E_i^2(\partial W_1 / \partial \lambda_i) - 2(\partial W_1 / \partial p_i)] / L_i. \quad (5.9)$$

Remarquons que, même si ϵ est de degré 2 en masses des planètes, la correction $\epsilon (E_i^2; W_1)$ est bien de degré 1, comme annoncé à la Section 2.3, étant donné que le dénominateur L_i est également de degré 1 en masses.

En prenant la racine de l'expression (5.8) et en effectuant un développement de Taylor, nous obtenons l'expression de l'"excentricité" E_i au premier ordre des masses :

$$E_i = \bar{E}_i \left(1 + \frac{\epsilon}{2\bar{E}_i^2} (E_i^2; W_1) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (5.10)$$

Plus les termes générés par la parenthèse de Poisson sont élevés, plus leur influence sur le comportement de l'excentricité est importante. Ainsi, l'amplitude des termes périodiques donne une

mesure de la proximité d'un système aux résonances en moyen mouvement correspondantes.

En effet, lorsqu'un système est proche d'une résonance en moyen mouvement $\frac{n_1}{n_2} = \frac{k_2}{k_1}$, les termes périodiques dont les coefficients sont les plus élevés comprennent des combinaisons du type " $k_1\lambda_1 - k_2\lambda_2$ ". Ces termes sont associés à de faibles fréquences (puisque $k_1n_1 - k_2n_2 \approx 0$) et donc influencent le comportement à long terme du système. C'est la raison pour laquelle notre approche analytique des Chapitres 3 et 4, basée sur une moyennisation de ces termes, ne peut être utilisée pour décrire la dynamique séculaire de tels systèmes. Lorsqu'on s'éloigne de la résonance, les combinaisons du type " $k_1\lambda_1 - k_2\lambda_2$ " sont cette fois de courtes périodes et leur moyennisation n'entraîne aucune conséquence sur la dynamique à long terme du système.

5.2 Application à différents systèmes extrasolaires

Analysons à présent la proximité des différents systèmes extrasolaires de la Table 1.2 (supposés coplanaires) à une quelconque résonance en moyen mouvement. Nous reproduisons à la Table 5.1, pour chacun de ces systèmes, les termes des expressions $\frac{\epsilon}{2E_1^2}(E_1^2; W_1)$ et $\frac{\epsilon}{2E_2^2}(E_2^2; W_1)$ (développées à l'ordre 12 en excentricités) dont les coefficients sont les plus élevés. Cela nous permettra de classer les exosystèmes en trois catégories, en fonction de leur proximité très faible, relativement faible ou importante à une quelconque résonance en moyen mouvement.

Tout d'abord, nous constatons que les systèmes HD 217107, HD 38529, HD 190360, HD 74156 et HD 168443 sont assez éloignés de toute résonance en moyen mouvement dans la mesure où leur comportement est déterminé par des termes qui ne comprennent, pour les principaux, aucune combinaison du type " $k_1\lambda_1 - k_2\lambda_2$ ". Ces systèmes sont qualifiés de hiérarchiques en raison de leur faible rapport des demi-grands axes ($a_1/a_2 = 0.017, 0.035, 0.033, 0.086$ et 0.077 respectivement).

Ensuite, la Table 5.1 met en évidence une certaine proximité des exosystèmes ν Andromède (2006a ou 2006b) et HD 12661 à la résonance 5/1. En effet, leur comportement est dominé cette fois par des termes incluant la combinaison angulaire particulière " $\lambda_1 - 5\lambda_2$ ", mais malgré cela, les coefficients de ces termes périodiques restent faibles, de l'ordre de 10^{-3} . Nous remarquons également que l'influence des termes non-résonants sur la planète extérieure est plus importante que celle des termes résonants. La même sorte de conclusion peut être menée quant à la proximité du système HD 169830 à la résonance 9/1. Tous ces systèmes ne sont que faiblement influencés par les résonances en moyen mouvement et une théorie séculaire est suffisante pour décrire avec précision le comportement à long terme de ces systèmes, comme l'illustreront les graphes de la Section 5.3.

Pour donner une idée de l'influence que peut exercer une résonance en moyen mouvement sur l'ordre de grandeur des coefficients, nous ajoutons le système Jupiter-Saturne, supposé coplanaire. Il est bien connu que les mouvements de ces planètes souffrent de perturbations importantes dues à la proximité de la résonance 5/2 connue sous le nom de *grande inégalité*. Le voi-

TAB. 5.1: Proximité de différents systèmes planétaires aux résonances en moyen mouvement par l'analyse des termes de $\frac{\epsilon}{2E_1^2}(E_1^2; W_1)$ et $\frac{\epsilon}{2E_2^2}(E_2^2; W_1)$ de coefficients les plus élevés : HD 217107 ($a_1/a_2 = 0.017$), HD 38529 ($a_1/a_2 = 0.035$), HD 190360 ($a_1/a_2 = 0.033$), HD 74156 ($a_1/a_2 = 0.086$), HD 168443 ($a_1/a_2 = 0.077$), ν Andromède 2006a ($a_1/a_2 = 0.328$), ν Andromède 2006b ($a_1/a_2 = 0.331$), HD 169830 ($a_1/a_2 = 0.225$), HD 12661 ($a_1/a_2 = 0.324$), HD 202206 ($a_1/a_2 = 0.325$), HD 108874 ($a_1/a_2 = 0.392$) et le système de Jupiter-Saturne supposé coplanaire ($a_1/a_2 = 0.546$; les éléments orbitaux considérés pour ce système sont $a_1 = 5.203$, $a_2 = 9.537$, $m_1 = 1$, $m_2 = 0.29941$, $e_1 = 0.048$, $e_2 = 0.054$, $\varpi_1 = -14.75^\circ$ et $\varpi_2 = -92.43^\circ$)

	$\frac{\epsilon}{2E_1^2}(E_1^2; W_1)$	$\frac{\epsilon}{2E_2^2}(E_2^2; W_1)$
HD 217107	$1.31 \cdot 10^{-05} \cos(4\lambda_2 + 2p_1 + 2p_2)$ $1.29 \cdot 10^{-05} \cos(3\lambda_2 + 2p_1 + p_2)$	$0.0398 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $0.0223 \cos(2\lambda_2 + 2p_2)$
HD 38529	$1.07 \cdot 10^{-04} \cos(2\lambda_2 + 2p_1)$ $9.16 \cdot 10^{-05} \cos(3\lambda_2 + 2p_1 + p_2)$	$0.00228 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $8.37 \cdot 10^{-04} \cos(2\lambda_2 + 2p_2)$
HD 190360	$-2.79 \cdot 10^{-05} \cos(\lambda_2 + p_1)$ $1.69 \cdot 10^{-05} \cos(2\lambda_2 + 2p_1)$	$0.208 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $0.0761 \cos(2\lambda_2 + 2p_2)$
HD 74156	$-5.09 \cdot 10^{-04} \cos(8\lambda_2 + 2p_1 + 6p_2)$ $-5.04 \cdot 10^{-04} \cos(9\lambda_2 + 2p_1 + 7p_2)$	$0.00228 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $0.00140 \cos(2\lambda_2 + 2p_2)$
HD 168443	$7.26 \cdot 10^{-04} \cos(2\lambda_2 + 2p_1)$ $3.63 \cdot 10^{-04} \cos(3\lambda_2 + 2p_1 + p_2)$	$0.00567 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $0.00121 \cos(2\lambda_2 + 2p_2)$
ν Andro 2006a	$-0.00604 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - 2p_2)$ $0.00499 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 3p_2)$ $0.00240 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 3p_1 - p_2)$	$0.00515 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $0.00432 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 3p_2)$ $-0.00174 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - 2p_2)$
ν Andro 2006b	$-0.00684 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - 2p_2)$ $0.00554 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 3p_2)$ $0.00278 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 3p_1 - p_2)$	$0.00604 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $0.00479 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 3p_2)$ $-0.00197 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - 2p_2)$
HD 169830	$-9.13 \cdot 10^{-04} \cos(\lambda_1 - 9\lambda_2 - 2p_1 - 6p_2)$ $7.18 \cdot 10^{-04} \cos(\lambda_1 - 9\lambda_2 - 3p_1 - 5p_2)$ $5.77 \cdot 10^{-04} \cos(2\lambda_2 + 2p_1)$	$0.00694 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $0.00237 \cos(2\lambda_2 + 2p_2)$ $0.00117 \cos(\lambda_1 - 9\lambda_2 - p_1 - 7p_2)$
HD 12661	$-0.00128 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - 2p_2)$ $8.61 \cdot 10^{-04} \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 3p_1 - p_2)$ $6.30 \cdot 10^{-04} \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 3p_2)$	$0.00355 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $0.00158 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 3p_2)$ $-0.00107 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - 2p_2)$
HD 202206	$-0.00370 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - 2p_2)$ $0.00233 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 3p_1 - p_2)$ $0.00210 \cos(2\lambda_1 - 11\lambda_2 - 4p_1 - 5p_2)$	$0.0236 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 3p_2)$ $0.0216 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $-0.0151 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - 2p_2)$
HD 108874	$0.0669 \cos(\lambda_1 - 4\lambda_2 - p_1 - 2p_2)$ $-0.0169 \cos(\lambda_1 - 4\lambda_2 - 2p_1 - p_2)$ $-0.00929 \cos(\lambda_1 - 4\lambda_2 - p_1 - 2p_2)$	$0.112 \cos(\lambda_1 - 4\lambda_2 - p_1 - 2p_2)$ $0.0757 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $-0.0630 \cos(\lambda_1 - 4\lambda_2 - 3p_2)$
Jup-Sat	$0.0136 \cos(\lambda_1 - 2\lambda_2 - p_1)$ $0.00667 \cos(2\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - p_2)$ $-0.00616 \cos(2\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 2p_2)$	$-0.0304 \cos(2\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 2p_2)$ $0.0290 \cos(\lambda_2 + p_2)$ $0.0278 \cos(2\lambda_1 - 5\lambda_2 - 3p_2)$

sinage de cette région de résonance a été étudié par [Michtchenko et Ferraz-Mello, 2001] entre autres et le même type d'étude a également été réalisée par [Callegari et al., 2004] dans le cas du système Uranus-Neptune. L'analyse de la Table 5.1 montre que les coefficients des termes périodiques résonants de ce système sont dominants et d'ordre supérieur (10^{-2}). De même, les systèmes extrasolaires HD 108874 (proche de la résonance 4/1) et HD 202206 (proche de la résonance 5/1) affichent un comportement similaire. C'est la raison pour laquelle nous n'avons pas étudié leur comportement séculaire aux Chapitres 3 et 4. La section prochaine confirmera que notre théorie séculaire est insuffisante pour décrire le mouvement à long terme de ces trois derniers systèmes.

5.3 Etude de l'étendue de la zone de résonance 5/1 à proximité du système ν Andromède

Comme le montre la Table 5.1, le mouvement du système ν Andromède (2006a) est influencé par sa proximité à la résonance 5/1. Afin d'étudier l'étendue de cette zone de résonance, nous varions le rapport des demi-grands axes et regardons les conséquences que cela engendre sur le comportement à long terme du système, tant du point de vue de la grandeur des coefficients des termes résonants (comme à la section précédente) que d'un point de vue graphique où nous regardons l'adéquation entre les graphes des évolutions séculaires obtenus par notre approche analytique et par une intégration numérique (de la même façon qu'à la Figure 4.1).

La Table 5.2 montre, comme précédemment, les termes de $\frac{\epsilon}{2E_1^2} (E_1^2; W_1)$ et de $\frac{\epsilon}{2E_2^2} (E_2^2; W_1)$ de coefficients les plus élevés pour différentes valeurs du demi-grand axe de la planète extérieure a_2 . Tous les autres éléments orbitaux osculateurs sont inchangés par rapport à ceux de la Table 1.2.

Pour $a_1/a_2 = 0.322$, la proximité de la résonance 11/2 influence principalement les résultats. En effet, le rapport des demi-grands axes de la résonance exacte est de $a_1/a_2 = 0.321$. Pour une plus petite valeur du demi-grand axe de la planète extérieure, c'est la résonance 5/1 qui influence cette fois le comportement du système. C'est le cas lorsque $a_1/a_2 = 0.328$ où les termes résonants sont présents dans le comportement du système mais avec des coefficients encore faibles. Ces deux exemples correspondent au cas de la deuxième catégorie que nous avons mise en évidence dans la section précédente, à savoir les systèmes de proximité relativement faible à une quelconque résonance en moyen mouvement. En effet, la Figure 5.1 dresse la comparaison entre notre approche analytique du Chapitre 4 et l'intégration numérique du problème des trois corps réalisée avec SWIFT. Concernant les deux premiers rapports de demi-grands axes considérés, les graphes supérieurs de la Figure 5.1 montrent que la théorie analytique constitue une bonne approche de la dynamique du système qui est donc principalement non-résonante.

Le même genre de résultat a été mis en évidence par [Rodríguez et Gallardo, 2005] concernant un autre système de la deuxième catégorie, le système extrasolaire HD 12661. Avec les éléments orbitaux osculateurs obtenus par D. Fisher, ils ont montré que ce dernier est dominé

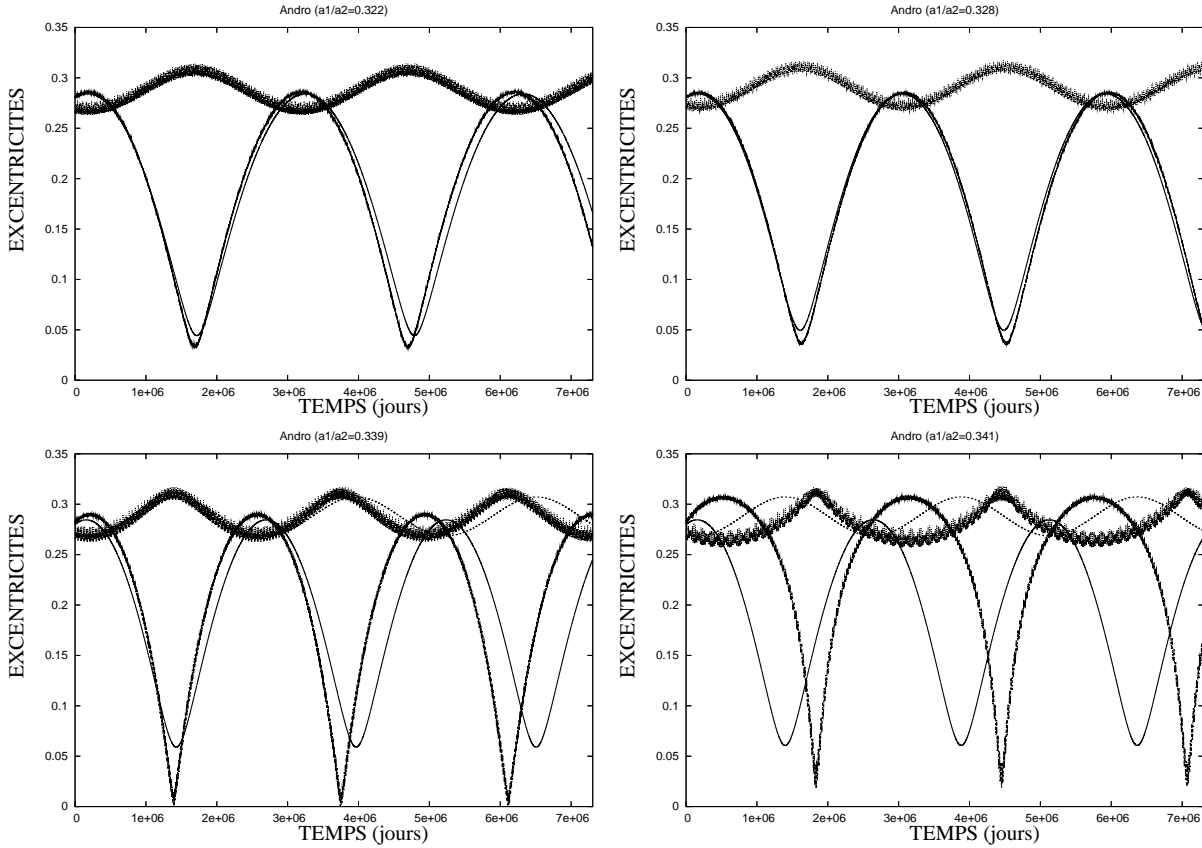


FIG. 5.1: Comparaison entre l'évolution temporelle des excentricités e_1 et e_2 donnée par notre théorie séculaire analytique (lignes en traits continus pour e_1 et en traits pointillés pour e_2) et celle obtenue par intégration numérique du problème des trois corps réalisée avec SWIFT (courbes incluant les variations de courtes périodes, le temps de passage de la planète extérieure au péricentre est pris comme temps initial). Tous les éléments orbitaux osculateurs sont identiques à ceux de la Table 1.2, excepté le demi-grand axe de la planète extérieure qui vaut respectivement : $a_1/a_2 = 0.322$ (graphe supérieur gauche), $a_1/a_2 = 0.328$ (graphe supérieur droit), $a_1/a_2 = 0.339$ (graphe inférieur gauche) et $a_1/a_2 = 0.341$ (graphe inférieur droit).

par une évolution purement séculaire très bien reproduite avec une fonction perturbative qui inclut seulement les termes d'ordre six en excentricités. La dynamique de ce système est, par conséquent, non-résonante malgré une certaine proximité à la résonance 11/2 : le rapport des fréquences (0.1846 pour les valeurs de la Table 1.2) est très proche du rapport 2/11 (0.1818), ce qui montre la limite de ce dernier critère comme évaluation de la proximité à la résonance.

Lorsque $a_1/a_2 = 0.339$, les termes en “ $\lambda_1 - 5\lambda_2$ ” dominent cette fois. La dynamique est encore décrite qualitativement par notre théorie séculaire mais non plus quantitativement, comme le montre la Figure 5.1. Enfin, le cas de $a_1/a_2 = 0.341$ est tel que le système est visiblement dans la résonance 5/1, la résonance exacte se situant en $a_1/a_2 = 0.342$. Par conséquent, notre approche échoue complètement.

Nous avons ainsi affiné la classe II des systèmes extrasolaires de [Ferraz-Mello et al., 2005a]

TAB. 5.2: Termes de coefficients les plus élevés des expressions $\frac{\epsilon}{2E_1^2}(E_1^2; W_1)$ et $\frac{\epsilon}{2E_2^2}(E_2^2; W_1)$ pour le système ν Andromède (2006a) avec différentes valeurs du demi-grand axe initial a_2 (*de haut en bas* : $a_2 = 2.575, 2.530, 2.445$ et 2.431)

a_1/a_2	$\frac{\epsilon}{2E_1^2}(E_1^2; W_1)$	$\frac{\epsilon}{2E_2^2}(E_2^2; W_1)$
0.322	$-0.00637 \cos(2\lambda_1 - 11\lambda_2 - 3p_1 - 6p_2)$	$0.00514 \cos(\lambda_2 + p_2)$
	$0.00507 \cos(2\lambda_1 - 11\lambda_2 - 4p_1 - 5p_2)$	$0.00456 \cos(2\lambda_1 - 11\lambda_2 - 2p_1 - 7p_2)$
	$0.00456 \cos(2\lambda_1 - 11\lambda_2 - 2p_1 - 7p_2)$	$-0.00364 \cos(2\lambda_1 - 11\lambda_2 - 3p_1 - 6p_2)$
0.328	$-0.00604 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - 2p_2)$	$0.00515 \cos(\lambda_2 + p_2)$
	$0.00499 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 3p_2)$	$0.00432 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 3p_2)$
	$0.00240 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 3p_1 - p_2)$	$-0.00174 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - 2p_2)$
0.339	$-0.0337 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - 2p_2)$	$0.0237 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 3p_2)$
	$0.0269 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 3p_2)$	$-0.00988 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - 2p_2)$
	$0.0139 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 3p_1 - p_2)$	$-0.00597 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 3p_2)$
	$0.00994 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - 2p_2)$	$0.00519 \cos(\lambda_2 + p_2)$
0.341	$-0.103 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - 2p_2)$	$0.0723 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 3p_2)$
	$0.0819 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 3p_2)$	$-0.0303 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 2p_1 - 2p_2)$
	$0.0426 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - 3p_1 - p_2)$	$-0.0182 \cos(\lambda_1 - 5\lambda_2 - p_1 - 3p_2)$

exposée au Chapitre 1 en deux sous-catégories, en tenant compte non pas uniquement du rapport des demi-grands axes mais également de l'ordre de la résonance ou, plus concrètement, de son influence sur l'évolution à long terme des excentricités.

5.4 Avantages et limitations de la moyennisation par rapport aux courtes périodes

5.4.1 Influence des anomalies moyennes sur le comportement à long terme

Contrairement à notre modèle analytique des Chapitres 3 et 4, l'intégration numérique d'un système formé de deux planètes coplanaires dépend des valeurs des anomalies moyennes initiales $M_i = n_i(t - \tau_i)$ (cfr Annexe B). Beaucoup de sources, et notamment le catalogue de Jean Schneider, ne précisent pas à quel instant t correspondent les valeurs des éléments orbitaux, ces éléments étant considérés comme constants sur de courtes périodes de temps. Les graphes des sections précédentes obtenus avec SWIFT ainsi que les Tables 5.1 et 5.2 sont tels que le temps de passage de la planète extérieure au péricentre est pris comme temps initial de l'intégration. Plus précisément, nous fixons le temps initial $t = \tau_2$, ce qui entraîne une anomalie moyenne de la planète extérieure nulle, soit

$$\begin{aligned} M_1 &= n_1(\tau_2 - \tau_1) \\ M_2 &= 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Il est important de remarquer que ce choix arbitraire d'un temps initial conditionne l'évolution à long terme du système. Pour illustrer ce fait, nous comparons, à la Figure 5.2, les évolu-

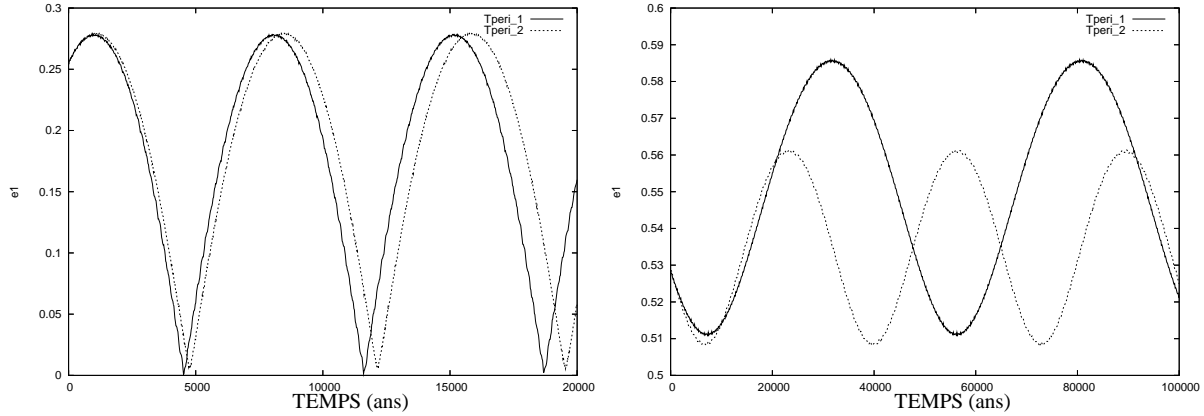


FIG. 5.2: Evolutions temporelles des excentricités des planètes intérieures des systèmes v Andromède 2006b (*graphe de gauche*) et HD 168443 (*graphe de droite*) obtenues par intégration numérique (SWIFT) pour les temps initiaux $t = \tau_1$ (courbe en traits continus) et $t = \tau_2$ (courbe en pointillés)

tions temporelles de l'excentricité e_1 des planètes intérieures des systèmes v Andromède 2006b (*graphe de gauche*) et HD 168443 (*graphe de droite*) obtenues par intégration numérique avec le logiciel SWIFT pour les temps initiaux $t = \tau_1$ (courbe en traits continus) et $t = \tau_2$ (courbe en pointillés). Même si l'évolution du système v Andromède n'est pas fortement modifiée par le changement de temps initial, il n'en va pas de même pour l'exosystème HD 168443. Cette différence de comportement plus marquée est probablement due aux masses importantes des planètes de ce système ($m_1 = 8.02M_J$ et $m_2 = 18.10M_J$). Elle a également été mise en évidence par [Lee et Peale, 2003] (qui indiquent que la détermination des paramètres orbitaux d'un système planétaire réalisée dans un repère de Jacobi (et non astrocentrique) réduit considérablement la sensibilité de l'évolution temporelle du système au temps initial ou, autrement dit, à ses conditions initiales). Une étude plus approfondie de la sensibilité des systèmes extrasolaires aux valeurs initiales des anomalies moyennes M_i ainsi qu'aux valeurs des masses pourrait se révéler intéressante.

Ces exemples montrent que le comportement à long terme d'un système peut, dans certains cas, être fortement influencé par les valeurs des anomalies moyennes initiales considérées. Etant donné les incertitudes actuelles sur ces dernières, notre approche analytique indépendante de celles-ci peut être considérée comme un atout dans l'étude de la dynamique séculaire des systèmes extrasolaires.

5.4.2 Prise en compte des anomalies moyennes au premier ordre des masses

Il peut être intéressant d'envisager l'erreur commise aux chapitres précédents en considérant, comme valeurs initiales de notre modèle analytique séculaire, les éléments orbitaux osculateurs et non leurs homologues moyennés par rapport aux courtes périodes, au premier ordre des masses. La Figure 5.3 compare les évolutions séculaires des excentricités des planètes intérieures des systèmes v Andromède 2006b et HD 168443 calculées analytiquement à

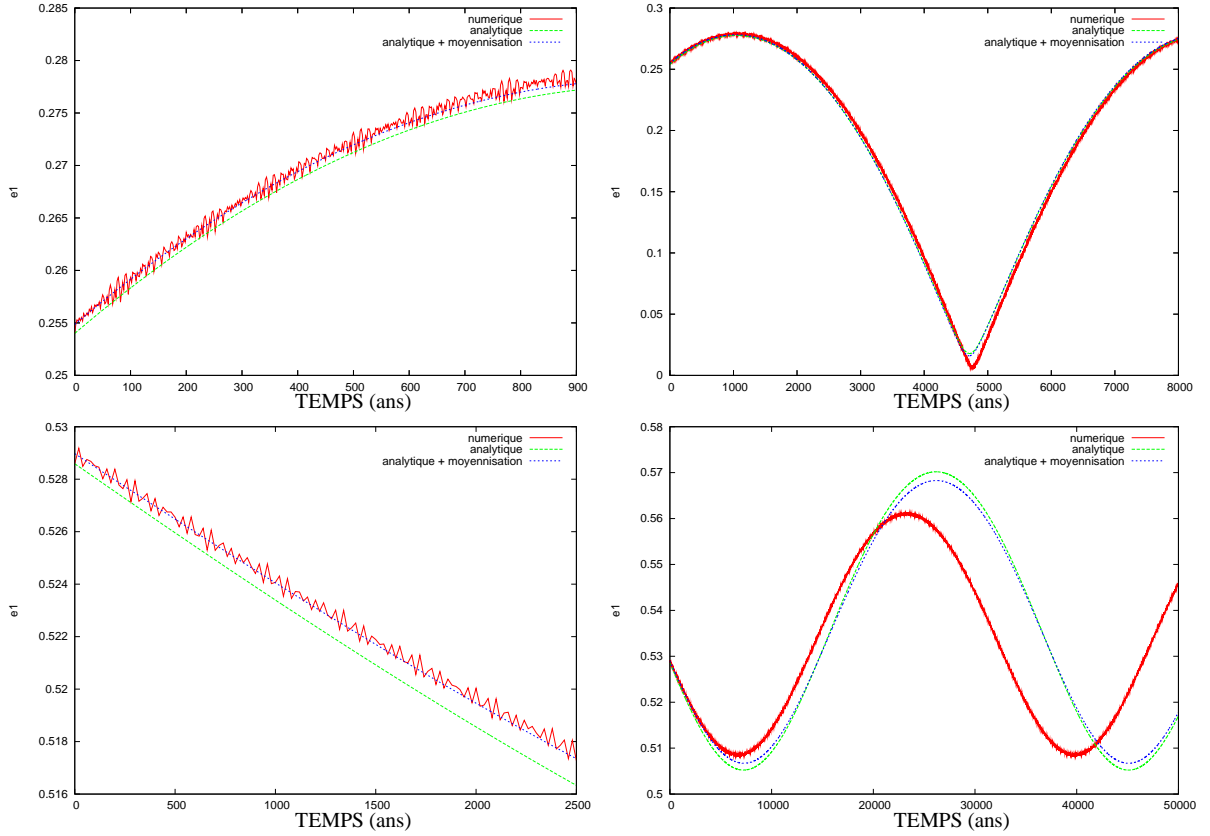


FIG. 5.3: Evolutions temporelles des excentricités des planètes intérieures des systèmes v Andromède 2006b (*graphes supérieurs*) et HD 168443 (*graphes inférieurs*) obtenues analytiquement à partir des éléments orbitaux osculateurs (courbes vertes), analytiquement à partir des mêmes éléments moyennés (courbes bleues) et numériquement (courbes rouges). Les graphes de gauche sont un agrandissement des premières années du mouvement séculaire représenté dans les graphes de droite.

partir des éléments orbitaux osculateurs (courbes vertes), analytiquement à partir des mêmes éléments moyennés (courbes bleues) et numériquement (courbes rouges, réalisées avec le logiciel SWIFT).

Concernant le système v Andromède, les anomalies moyennes osculatrices sont fixées à $M_1 = -143.67^\circ$ et $M_2 = 0^\circ$. L'excentricité osculatrice de la planète intérieure vaut, quant à elle, $e_1 = 0.254$. La moyennisation au premier ordre des petites masses explicitée à la Section 5.1 ne modifie que peu cette valeur puisque $\bar{e}_1 = 0.254856$. De même les autres éléments orbitaux osculateurs ne sont que peu modifiés par la moyennisation au premier ordre des masses. C'est la raison pour laquelle nous avons simplifié, dans les Chapitres 3 et 4, l'approximation analytique en n'effectuant pas le calcul des éléments orbitaux moyennés.

Sur une courte période de temps, la Figure 5.3 (graphe supérieur gauche) montre que notre modélisation analytique prenant en compte les éléments orbitaux moyennés ajuste au mieux la courbe d'intégration numérique. Considérer les éléments orbitaux moyennés est nécessaire

si l'on veut suivre l'évolution d'une orbite particulière moyennée par rapport aux courtes périodes, et non celle d'une autre orbite moyennée qui correspond à d'autres éléments orbitaux osculateurs. En effet, le graphe supérieur gauche montre ainsi que l'évolution de l'excentricité e_1 décrite à partir des conditions initiales osculatrices correspond à une valeur minimale de l'excentricité plutôt qu'à une valeur moyenne. D'où la nécessité de corriger ces conditions initiales en les moyennant au premier ordre des masses.

Toutefois, nous sommes intéressés, dans ce travail, par le comportement du système sur de grandes échelles de temps et le graphe supérieur droit montre que l'amélioration obtenue en considérant les éléments osculateurs moyennés n'est pas réellement significative sur le long terme, ce qui nous a permis de ne pas tenir compte de la moyennisation sur les éléments orbitaux osculateurs dans les chapitres précédents.

Des résultats semblables sont obtenus à la Figure 5.3 pour le système HD 168443. Le graphe inférieur droit met également en évidence les limitations de notre théorie séculaire au second degré des masses. En effet, dans le cas de ce dernier exosystème, les masses sont particulièrement importantes ($m_1 = 8.02M_J$ et $m_2 = 18.10M_J$), ce qui explique que l'approximation au second degré des masses n'est plus suffisante (le produit des masses des exoplanètes vaut, en masse solaire, $(m_1 m_2)/m_0^2 = 4.42 \times 10^{-6}$ pour ν Andromède et est nettement supérieur dans le cas de HD 168443 puisque $(m_1 m_2)/m_0^2 = 1.44 \times 10^{-4}$).

Ainsi, une meilleure approximation analytique peut être attendue d'un développement de la fonction hamiltonienne à un degré supérieur des masses et d'une moyennisation de l'Hamiltonien à un ordre supérieur également. Celle-ci ne s'avère pas réellement nécessaire pour des systèmes dont les masses des planètes n'excèdent pas de petits multiples de la masse de Jupiter (comme l'exosystème ν Andromède par exemple). Cependant, les masses des exoplanètes actuellement détectées étant des masses minimales possibles, cette moyennisation peut se révéler indispensable pour les exosystèmes où une forte augmentation des masses serait découverte.

Troisième partie

SYSTÈMES TRIDIMENSIONNELS

Dans le cas d'un système extrasolaire supposé coplanaire, l'approximation de la dynamique séculaire obtenue par un développement en excentricités de la perturbation semble être une méthode analytique tout à fait fiable et peu coûteuse. Cette dernière est capable de modéliser le comportement à long terme de planètes dont les excentricités peuvent atteindre des valeurs aussi élevées que celles de l'exosystème HD 74156 ($e_1 = 0.636$ et $e_2 = 0.583$). Un rapide coup d'oeil à la convergence numérique de l'Hamiltonien permet en outre de connaître la précision atteinte par le développement limité à l'ordre 12.

Ces résultats encourageants nous incitent à tenter la même approche pour des systèmes extrasolaires cette fois tridimensionnels (toujours formés de deux planètes hors résonance en moyen mouvement). A cause des limitations des méthodes de détection, la résolution spatiale des exosystèmes découverts actuellement est pour l'instant impossible. Dans un tel contexte, l'intérêt des méthodes analytiques est multiple : localiser les équilibres stables et instables de la dynamique (les voisinages des premiers étant des parties de l'espace de phase assez accueillantes que pour abriter un système extrasolaire des millions d'années durant ; les voisinages des seconds étant peu propices à la survie à long terme d'un système extrasolaire) ou effectuer aisément une analyse paramétrique du problème (par exemple une étude de la sensibilité du comportement à long terme d'un système à une modification de la valeur initiale d'un de ses éléments orbitaux osculateurs).

Ces différents aspects vont être traités dans cette dernière partie qui est un miroir des Chapitres 3 et 4, et qui est basée sur une généralisation des résultats précédents à des systèmes extrasolaires d'orbites non-coplanaires, généralisation réalisée non sans efforts puisque le problème à traiter augmente considérablement en difficulté par l'adjonction de deux degrés de liberté supplémentaires. Un nouveau défi à relever pour notre approche hamiltonienne.

Chapitre 6

Implications du changement de stabilité d'un équilibre à haute inclinaison mutuelle dans l'apparition de résonances séculaires

Ce premier chapitre consacré aux systèmes extrasolaires constitués de deux planètes d'orbites non-coplanaires a pour objectif d'étudier analytiquement les différents équilibres du problème séculaire tridimensionnel des trois corps et leurs implications sur la structure de l'espace de phase. A nouveau seuls les systèmes hors résonance en moyen mouvement sont considérés.

Notre approche analytique présentée à la Section 6.1 est basée, semblablement à l'étude des systèmes coplanaires, sur un développement en excentricités et en inclinaisons des interactions entre les planètes, développement limité à l'ordre 12 dont il s'agit de vérifier la convergence numérique, et sur une moyennisation des courtes périodes au premier ordre des masses réduisant le problème à quatre degrés de liberté. De plus, l'adoption du plan de Laplace comme plan de référence réalisée concrètement par la réduction de [Jacobi, 1842] permet de réduire le problème à seulement deux degrés de liberté. Un grand intérêt de ce modèle est qu'il ne dépend alors, comme précédemment, que de trois paramètres : le rapport des demi-grands axes, le rapport des masses et le déficit de moment angulaire.

En introduisant des variables canoniques non-singulières de “type Poincaré”, la formulation de l'Hamiltonien met en évidence les symétries et particularités du problème tridimensionnel séculaire. Ces variables sont semblables à celles introduites par [Poincaré, 1892] dans sa description des “orbites périodiques de la troisième sorte” dans le cas de faibles rapports de masses et, plus tard, entre autres par [Jefferys et Moser, 1966] et [Robutel, 1995] dans leur preuve de l'extension de ces orbites périodiques à des mouvements quasi-périodiques. Le but de leurs travaux était d'établir une preuve mathématique de l'existence de tels mouvements en utilisant la théorie KAM et en se limitant par conséquent à des excentricités, rapports de demi-grands axes et/ou rapports de masses faibles. Notre objectif est sensiblement différent puisque nous recherchons une approximation analytique capable de décrire le mouvement général du problème séculaire pour des rapports de demi-grands axes, des rapports de masses et des excentricités de

l'ordre de ceux observés dans les systèmes extrasolaires actuellement découverts.

En ce sens, le présent chapitre est comparable au travail de [Michtchenko et al., 2006b] qui fut, pour nous, une réelle source d'inspiration. Ce dernier repose sur une étude semi-numérique décrivant les principales caractéristiques du problème (cfr Section 1.4.2) mais, comme nous le verrons, notre théorie analytique va plus loin en décrivant de façon beaucoup plus précise ces caractéristiques et en identifiant les concepts dynamiques expliquant ces comportements. En effet, notre fonction hamiltonienne exprimée en variables canoniques non-singulières facilite l'analyse géométrique des courbes d'énergie constante ainsi que l'étude de la stabilité des extrema de l'Hamiltonien qui déterminent à eux seuls les principales particularités de la dynamique.

Le problème étant à quatre dimensions, il est difficile de visualiser son espace de phase mais on peut cependant espérer définir un plan représentatif des différentes classes d'orbites. Le premier plan représentatif considéré ($w_1 = \pm 90^\circ$ et $w_2 = \pm 90^\circ$) à la Section 6.2 montre l'existence d'un équilibre à excentricités nulles et inclinaison mutuelle maximale, déjà décrit par [Poincaré, 1892]. Lorsque l'inclinaison mutuelle augmente, ce point fixe à l'origine stable change de stabilité et donne naissance par bifurcation à deux équilibres que nous appellerons équilibres de Kozai, étant apparentés aux résonances de Kozai présentes dans le problème restreint ([Kozai, 1962]). L'analyse des différents équilibres du problème séculaire réduit et de leur stabilité fait l'objet de la Section 6.3.

La Section 6.4 effectue une analyse paramétrique de ce même problème et examine pour quelles valeurs des trois paramètres se produit la bifurcation de l'équilibre central. La dynamique du problème est également étudiée à la Section 6.5 au travers de surfaces de section montrant la modification de l'espace de phase entraînée par le changement de stabilité de l'équilibre à excentricités nulles : les variétés stables et instables associées aux orbites périodiques instables émanant de cet équilibre sont responsables de la présence d'une large zone chaotique.

Un second plan représentatif est envisagé à la Section 6.6 ($w_1 = 0^\circ$ ou 180° et $w_2 = 0^\circ$ ou 180°) et met en évidence l'existence d'équilibres instables supplémentaires à très haute inclinaison mutuelle.

Enfin, la dernière section tisse un lien avec le cas coplanaire étudié au Chapitre 3 en considérant la résonance séculaire non-linéaire découverte à hautes excentricités comme une trajectoire périodique du problème séculaire tridimensionnel des trois corps.

6.1 Hamiltonien du problème non-coplaire

6.1.1 Réduction à deux degrés de liberté

Considérons à nouveau le système formé par une étoile centrale de masse m_0 et deux planètes de masses m_1 et m_2 en interaction gravitationnelle. Ces deux planètes ne sont plus sou-

prises, dans cette troisième partie, à une quelconque hypothèse de coplanarité des deux plans orbitaux. En prenant en compte les mêmes conventions que celles définies au Chapitre 3, nous obtenons une formulation identique de l'Hamiltonien :

$$\mathcal{H} = -\frac{Gm_0m_1}{2a_1} - \frac{Gm_0m_2}{2a_2} - Gm_1m_2 \left[\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} - \frac{(\vec{r}_1|\vec{r}_2)}{r_2^3} \right], \quad (6.1)$$

où les notations \vec{r}_i et r_i représentent, respectivement, le vecteur position du corps m_i , vecteur à trois dimensions cette fois, et la norme de ce vecteur.

Le Chapitre 2 nous a fourni le développement en excentricités et en inclinaisons du dernier terme de cette expression, repris ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{Gm_0m_1}{2a_1} - \frac{Gm_0m_2}{2a_2} \\ & - \frac{Gm_1m_2}{a_2} \sum_{k,i_l,j_l,l \in \underline{4}} A_{i_l}^{k,j_l} e_1^{|j_1|+2i_1} e_2^{|j_2|+2i_2} \left(\sin \frac{i_1}{2} \right)^{|j_3|+2i_3} \left(\sin \frac{i_2}{2} \right)^{|j_4|+2i_4} \cos \Phi, \end{aligned} \quad (6.2)$$

où $\Phi = [(k + j_1 + j_3)\lambda_1 - (k + j_2 + j_4)\lambda_2 - j_1\varpi_1 + j_2\varpi_2 - j_3\Omega_1 + j_4\Omega_2]$. Rappelons que les indices $(k, i_l, l \in \underline{4})$ sont des entiers positifs et que la somme $j_3 + j_4$ est paire. Les coefficients $A_{i_l}^{k,j_l}$ dépendent seulement du rapport a_1/a_2 des demi-grands axes. Comme nous l'avons montré à la Section 2.2, ce développement possède la caractéristique de d'Alembert dans les couples $(e_i, \lambda_i - \varpi_i)$ et $(\sin \frac{i_i}{2}, \lambda_i - \Omega_i)$, et est tel que la somme des coefficients des variables angulaires est nulle.

De la même manière que pour l'étude du cas de planètes coplanaires, nous choisissons d'exprimer l'Hamiltonien dans les variables classiques de Delaunay modifiées (limitées au second degré des masses) :

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \text{longitude moyenne de } m_i & L_i &= m_i \sqrt{Gm_0 a_i} \\ p_i &= -\text{longitude du péricentre de } m_i (= -\varpi_i) & P_i &= L_i \left[1 - \sqrt{1 - e_i^2} \right] \\ q_i &= -\text{longitude du noeud de } m_i (= -\Omega_i) & Q_i &= L_i \sqrt{1 - e_i^2} [1 - \cos i_i], \end{aligned} \quad (6.3)$$

et, plus particulièrement, nous préférons utiliser les expressions sans dimension $E_i = \sqrt{2P_i/L_i}$ et $S_i = \sqrt{2Q_i/L_i}$ à la place, respectivement, des excentricités et des inclinaisons. Pour des excentricités et inclinaisons faibles à modérées, les quantités S et $2 \sin \frac{i}{2}$ ont des valeurs semblables, comme le montre la Figure 6.1. Y sont représentées les quantités $S = \sqrt{2Q/L}$ en fonction des inclinaisons comprises entre 0 et 2π , pour différentes valeurs des excentricités. Nous remarquons que ces courbes sont proches de celle de $2 \sin \frac{i}{2}$ lorsque la valeur de l'excentricité est faible, et elles sont même identiques pour une excentricité nulle (auquel cas on retrouve la formule trigonométrique de Carnot).

Ce choix de variables mène à la formulation de l'Hamiltonien suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{Gm_0m_1}{2a_1} - \frac{Gm_0m_2}{2a_2} \\ & - \frac{Gm_1m_2}{a_2} \sum_{k,i_l,j_l,l \in \underline{4}} B_{i_l}^{k,j_l} E_1^{|j_1|+2i_1} E_2^{|j_2|+2i_2} S_1^{|j_3|+2i_3} S_2^{|j_4|+2i_4} \cos \Phi, \end{aligned} \quad (6.4)$$

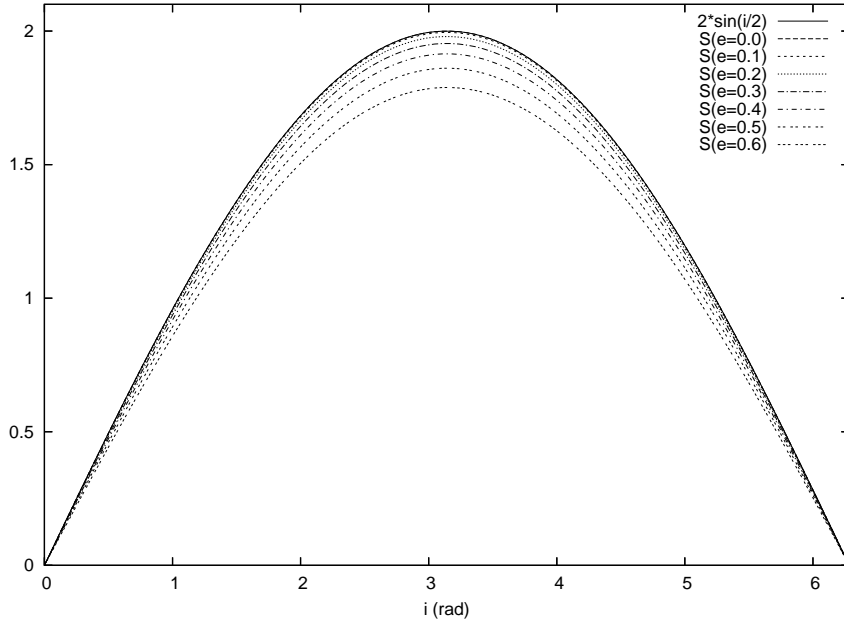


FIG. 6.1: Graphe de la quantité $S = \sqrt{2\sqrt{1-e^2}(1-\cos i)}$ en fonction de l'inclinaison i (en radians), pour les valeurs d'excentricité : $e = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ et 0.6 . Plus l'excentricité est faible, plus les expressions S et $2 \sin \frac{i}{2}$ sont proches.

avec Φ dénotant la combinaison d'angles

$$\Phi = [(k + j_1 + j_3)\lambda_1 - (k + j_2 + j_4)\lambda_2 + j_1 p_1 - j_2 p_2 + j_3 q_1 - j_4 q_2]. \quad (6.5)$$

A nouveau, seule la dynamique à long terme du système est l'objet de cette étude et à condition que le système ne soit pas trop proche d'une résonance en moyen mouvement, nous pouvons effectuer la même moyennisation "aux ciseaux" par rapport aux variables rapides λ_i que celle explicitée au Chapitre 5. L'expression de l'Hamiltonien moyenné au premier ordre des masses est la suivante

$$\mathcal{K} = \sum_{k, j_1, j_2, i_l, l \in \underline{4}} C_{i_l}^{k, j_1, j_2} E_1^{|j_1|+2i_1} E_2^{|j_2|+2i_2} S_1^{|k+j_1|+2i_3} S_2^{|k+j_2|+2i_4} \cos \Phi, \quad (6.6)$$

avec $\Phi = [j_1 p_1 - j_2 p_2 - (k + j_1) q_1 + (k + j_2) q_2]$. La caractéristique de d'Alembert s'exerce à présent sur les couples (E_i, p_i) et (S_i, q_i) . Les longitudes moyennes n'apparaissant plus dans cette expression, les moments associés L_i et par conséquent les demi-grands axes a_i sont constants. C'est la raison pour laquelle les deux premiers termes de l'expression ont pu être supprimés de l'Hamiltonien, celui-ci étant défini à une constante près. De même, le facteur $-Gm_1 m_2 / a_2$ n'est pas reproduit. L'Hamiltonien ainsi obtenu possède quatre degrés de liberté.

Dans ce travail, nous choisissons de limiter l'Hamiltonien séculaire (6.6) aux termes dont la somme des exposants de E_1 , E_2 , S_1 et S_2 est inférieure ou égale à 12. Une première étape importante dans l'analyse de ce modèle est de vérifier s'il peut être appliqué aux systèmes extrasolaires. Comme dans le cas coplanaire, nous nous intéressons uniquement à une partie du

TAB. 6.1: Comparaison des convergences numériques du développement de la perturbation entière \mathcal{H} et du même développement limité aux termes séculaires \mathcal{K} , dans le cas d'orbites non-coplanaires. Le rapport des demi-grands axes est fixé à $a_1/a_2 = 0.2$.

Ordre en E_i	Série entière (6.4)		Termes séculaires (6.6)	
	Coefficient le plus élevé	Nombre de termes	Coefficient le plus élevé	Nombre de termes
0	1.01	18	1.01	1
1	1.03	74	0.	0
2	1.05	368	3.24×10^{-2}	6
3	1.20	1 118	0.	0
4	1.65	3 180	8.81×10^{-2}	31
5	3.15	7 462	0.	0
6	5.65	16 436	2.08×10^{-1}	110
7	9.74	32 742	0.	0
8	2.11×10^1	62 071	3.83×10^{-1}	326
9	4.40×10^1	110 566	0.	0
10	8.95×10^1	189 667	1.17	812
11	1.94×10^2	311 594	0.	0
12	4.25×10^2	497 348	5.33	1 810

développement complet en excentricités et en inclinaisons, la partie séculaire, et nous nous attendons au même genre de résultat quant à la convergence numérique de cette dernière. Pour vérifier cette hypothèse, la Table 6.1 présente les mêmes informations que celles contenues dans la Table 3.2 consacrée aux systèmes coplanaires. Le cas tridimensionnel semble également caractérisé par une différence assez nette dans l'ordre de grandeur des contributions des différents ordres (ordres 2 à 12) des Hamiltoniens moyennés et non-moyennés par rapport aux courtes périodes. Notons également que l'approche séculaire ne compte que peu de termes (3096 termes dans cet exemple) par rapport au développement non-moyenné (1 232 644 termes dans cet exemple où les termes du type $k(\lambda_1 - \lambda_2)$ sont calculés jusqu'à $k = 18$).

Dans la suite, nous vérifierons systématiquement la convergence numérique de nos différents résultats. Comme attendu, nous verrons que plus l'inclinaison mutuelle des plans orbitaux du système considéré est élevée, plus la convergence numérique est faible. Toutefois, pour des inclinaisons mutuelles faibles à modérées, la convergence numérique est étonnamment bonne une fois de plus.

Comme nous l'avons déjà mentionné à de multiples reprises, nous disposons d'une relation supplémentaire maintenue lors de la moyennisation par rapport aux courtes périodes : la somme des coefficients des variables angulaires est égale à zéro. L'Hamiltonien ne dépend ainsi que de trois variables angulaires, comme le montre cette nouvelle formulation de l'angle Φ :

$$\Phi = j_1(p_1 - q_1) - j_2(p_2 - q_2) - k(q_1 - q_2). \quad (6.7)$$

Cette observation nous incite à définir une nouvelle transformation canonique :

$$\begin{aligned} w_1 &= p_1 - q_1 & W_1 &= P_1 \\ w_2 &= p_2 - q_2 & W_2 &= P_2 \\ r_1 &= q_1 - q_2 & R_1 &= P_1 + Q_1 \\ r_2 &= q_2 & R_2 &= P_1 + P_2 + Q_1 + Q_2. \end{aligned} \quad (6.8)$$

L'angle w_i est défini comme l'opposé de l'argument du péricentre de la planète m_i . Comme recherché, seuls les trois premiers angles sont présents dans l'Hamiltonien, ce qui signifie que R_2 est une intégrale première du problème.

Dans le cas du problème des trois corps, la *réduction de Jacobi*, aussi appelée *élimination des noeuds* ([Jacobi, 1842]), permet de réduire la fonction Hamiltonienne (6.6) à deux degrés de liberté seulement. Elle est basée sur l'invariance du moment angulaire total, \vec{C} , en norme et en direction. La direction constante du vecteur \vec{C} définit un plan invariant perpendiculaire à ce vecteur. Ce plan est connu sous le nom de *plan invariant de Laplace*. Le choix de ce plan comme plan de référence implique les relations suivantes :

$$\Omega_1 - \Omega_2 = \pm 180^\circ \quad (6.9)$$

$$C_x = C_y = 0 \text{ et } C_z = \|\vec{C}\| = \text{cte} = \sum_{i=1,2} m_i \sqrt{Gm_0 a_i (1 - e_i^2)} \cos i_i, \quad (6.10)$$

où C_x , C_y et C_z représentent les composantes du vecteur du moment angulaire total. Une écriture équivalente de ces égalités dans les éléments de Delaunay modifiés

$$q_1 - q_2 = \pm 180^\circ \quad (6.11)$$

$$(L_1 - P_1) \cos i_1 + (L_2 - P_2) \cos i_2 = C \quad (6.12)$$

$$(L_1 - P_1) \sin i_1 + (L_2 - P_2) \sin i_2 = 0, \quad (6.13)$$

avec C la norme du moment angulaire total, montre que le choix du plan de Laplace fixe l'angle r_1 à une valeur constante. Par conséquent, il découle des équations hamiltoniennes ($\frac{\partial H}{\partial R_1} = \dot{r}_1$ doit être nul) que le moment associé R_1 n'est plus présent dans l'Hamiltonien. Le problème est ainsi réduit à deux degrés de liberté (w_1, w_2, W_1, W_2).

Il est à noter que, dans le plan de référence de Laplace, la constance du moment R_2 est liée à la constance du moment angulaire total. En effet, la quantité R_2 représente un invariant du système séculaire dénommé, par [Laskar, 1997], *angular momentum deficit* :

$$\text{AMD} = \sum_{i=1}^2 L_i (1 - \sqrt{1 - e_i^2} \cos i_i). \quad (6.14)$$

L'équation (6.12) de la définition du plan de Laplace permet de réécrire le déficit de moment angulaire en fonction de la norme du moment angulaire total

$$\text{AMD} = L_1 + L_2 - C. \quad (6.15)$$

Dans la suite, nous préférons nous référer à une quantité équivalente mais non-dimensionnelle que nous dénommerons Σ :

$$\Sigma = \frac{\text{AMD}}{L_2}(1 - \mu), \quad (6.16)$$

μ symbolisant toujours le rapport des masses $m_1/(m_1 + m_2)$. Pour une valeur constante du moment angulaire total C , ou de façon équivalente pour une valeur fixée de Σ , les relations (6.12) et (6.13) nous permettent d'évaluer les inclinaisons comme fonctions des excentricités.

Finalement, nous exécutons une dernière transformation canonique des coordonnées afin de nous munir de variables non-singulières et d'ainsi pouvoir également analyser le cas particulier de deux planètes circulaires. Nous choisissons de travailler avec les variables de type Poincaré

$$x_i = \sqrt{2P_i} \cos w_i \quad \text{et} \quad y_i = \sqrt{2P_i} \sin w_i, \quad (6.17)$$

ce qui entraîne la reformulation de l'Hamiltonien suivante :

$$\mathcal{K} = \sum_{k_l, l \in \underline{6}} D_{k_l} x_1^{k_1} y_1^{k_2} x_2^{k_3} y_2^{k_4} \sqrt{2Q_1}^{k_5} \sqrt{2Q_2}^{k_6}. \quad (6.18)$$

Il reste à déterminer les expressions des moments Q_1 et Q_2 en fonction des variables x_i et y_i . Des définitions du plan de Laplace et de Σ , nous obtenons

$$\begin{aligned} 2Q_1 &= \chi[2L_2 - x_2^2 - y_2^2 - \chi]/(L_1 + L_2 - \text{AMD}) \\ 2Q_2 &= \chi[2L_1 - x_1^2 - y_1^2 - \chi]/(L_1 + L_2 - \text{AMD}), \end{aligned} \quad (6.19)$$

où χ est défini par

$$\chi = \text{AMD} - P_1 - P_2 = \text{AMD} - (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)/2 \quad (6.20)$$

et est la partie du déficit de moment angulaire relative à l'inclinaison mutuelle des orbites. En développant en série de puissance les expressions (6.19), l'Hamiltonien, tronqué à l'ordre 12 dans les quantités x_i , y_i et $\sqrt{\chi}$, devient

$$\mathcal{K} = \sum_{n_l, l \in \underline{6}} E_{n_l} x_1^{n_1} y_1^{n_2} x_2^{n_3} y_2^{n_4} \chi^{n_5} D^{n_6}, \quad (6.21)$$

avec $D = [L_1 + L_2 - \text{AMD}]^{-1/2}$. Notons que, comme la somme $k_5 + k_6$ des exposants de $\sqrt{2Q_i}$ est paire, l'exposant n_5 est bien entier. Cette fois, les coefficients E_{n_l} ne dépendent plus seulement du rapport des demi-grands axes α mais également du rapport des masses μ . Ainsi, comme dans le cas coplanaire, notre approche dépend seulement de trois paramètres, les deux rapports précédents et la valeur de Σ , et permet d'aisément analyser la manière dont la dynamique du problème est influencée par chacun de ces paramètres (cfr Section 6.4).

6.1.2 Symétries du problème réduit

Le fait que l'expression (6.6) soit une fonction paire des variables angulaires implique que dans le développement (6.21) les sommes $n_1 + n_3$ et $n_2 + n_4$ sont paires. Il en découle les

relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -(\partial\mathcal{K}/\partial y_1) = F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = F_1(-x_1, -x_2, y_1, y_2) \\
 &= -F_1(x_1, x_2, -y_1, -y_2) = -F_1(-x_1, -x_2, -y_1, -y_2), \\
 \dot{x}_2 &= -(\partial\mathcal{K}/\partial y_2) = F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = F_2(-x_1, -x_2, y_1, y_2) \\
 &= -F_2(x_1, x_2, -y_1, -y_2) = -F_2(-x_1, -x_2, -y_1, -y_2), \\
 \dot{y}_1 &= (\partial\mathcal{K}/\partial x_1) = F_3(x_1, x_2, y_1, y_2) = F_3(x_1, x_2, -y_1, -y_2) \\
 &= -F_3(-x_1, -x_2, y_1, y_2) = -F_3(-x_1, -x_2, -y_1, -y_2), \\
 \dot{y}_2 &= (\partial\mathcal{K}/\partial x_2) = F_4(x_1, x_2, y_1, y_2) = F_4(x_1, x_2, -y_1, -y_2) \\
 &= -F_4(-x_1, -x_2, y_1, y_2) = -F_4(-x_1, -x_2, -y_1, -y_2).
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Ainsi, pour chaque solution $(x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))$ des équations différentielles, nous pouvons définir trois autres solutions :

$$\begin{aligned}
 &-x_1(-t), -x_2(-t), \quad y_1(-t), \quad y_2(-t), \\
 &x_1(-t), \quad x_2(-t), -y_1(-t), -y_2(-t), \\
 &-x_1(-t), -x_2(-t), -y_1(-t), -y_2(-t).
 \end{aligned}$$

Ces symétries, qui ont déjà été observées par [Jefferys et Moser, 1966], sont similaires à celles du problème restreint avec masses égales ([Stromgren, 1933]) et sont assez utiles pratiquement dans la réalisation de surfaces de section ou dans l'étude des orbites périodiques. En effet, comme dans le problème restreint avec masses égales, il existe trois types d'orbites périodiques symétriques : les orbites symétriques par rapport aux axes y_i telles que

$$\begin{aligned}
 \text{en } t = 0 & \quad x_1 = x_2 = 0, y_1 = y_1^a, y_2 = y_2^a \\
 \text{en } t = T/2 & \quad x_1 = x_2 = 0, y_1 = y_1^b, y_2 = y_2^b,
 \end{aligned}$$

celles symétriques par rapport aux axes x_i telles que

$$\begin{aligned}
 \text{en } t = 0 & \quad x_1 = x_1^a, x_2 = x_2^a, y_1 = y_2 = 0 \\
 \text{en } t = T/2 & \quad x_1 = x_1^b, x_2 = x_2^b, y_1 = y_2 = 0,
 \end{aligned}$$

et enfin celles symétriques par rapport à tous les axes telles que

$$\begin{aligned}
 \text{en } t = 0 & \quad x_1 = x_2 = 0, y_1 = y_1^a, y_2 = y_2^a \\
 \text{en } t = T/4 & \quad x_1 = x_1^b, x_2 = x_2^b, y_1 = y_2 = 0.
 \end{aligned}$$

La Section 6.5 montrera que les familles d'orbites périodiques qui constituent le “corps principal” de l'espace de phase sont symétriques par rapport aux axes y_i et certaines par rapport à tous les axes.

6.2 Etude de l'équilibre central et construction d'une représentation géométrique

Une autre conséquence de la parité des exposants $n_1 + n_3$ et $n_2 + n_4$ dans l'expression (6.21) est la possible réécriture des équations hamiltoniennes sous la forme

$$\begin{aligned}\dot{y}_i &= \frac{d\mathcal{K}}{dx_i} = x_1 F_1(x_i, y_i) + x_2 F_2(x_i, y_i) \\ \dot{x}_i &= -\frac{d\mathcal{K}}{dy_i} = y_1 G_1(x_i, y_i) + y_2 G_2(x_i, y_i).\end{aligned}\tag{6.23}$$

Ainsi, lorsque $x_1 = x_2 = 0$, les dérivées \dot{y}_i s'annulent simultanément et, de même, les dérivées \dot{x}_i s'annulent lorsque $y_1 = y_2 = 0$. Par conséquent, $e_1 = e_2 = 0$ est un équilibre du problème réduit, quelle que soit la valeur du déficit de moment angulaire Σ (c'est-à-dire d'inclinaison mutuelle des deux orbites) considérée.

Pour une valeur fixée de Σ , le problème est à quatre dimensions et il est impossible de définir une surface de section où chaque orbite serait représentée par un (ou plusieurs) point(s) sur cette surface. Nous pouvons seulement espérer trouver une représentation géométrique, *un plan représentatif*, qui contiendrait les conditions initiales d'orbites *représentatives* de chacune des classes d'orbites : pour chaque orbite du problème, il serait possible de trouver une autre orbite proche de cette dernière et qui traverse ce plan de référence. [Michtchenko et al., 2006b] ont défini un tel plan représentatif de la dynamique mais, malheureusement, ce dernier est en réalité la juxtaposition de deux demi-plans et n'est pas continu. La discontinuité de cette représentation rend l'interprétation du diagramme assez difficile et ne permet pas de visualiser une des caractéristiques principales du problème (l'équilibre $e_1 = e_2 = 0$ dont la stabilité gouverne la dynamique) précisément située à l'endroit de la discontinuité.

Comme plan représentatif, nous choisissons le plan $x_1 = x_2 = 0$, ce qui revient à fixer les arguments des péricentres à $\pm 90^\circ$. En traçant les courbes d'Hamiltonien constant dans le plan (y_1, y_2) avec w_i fixé à 90° du côté positif de l'axe et à -90° du côté négatif, nous obtenons une première représentation de la dynamique à la Figure 6.2 (gauche). En réalité, afin de rendre l'interprétation plus aisée, nous effectuons un changement d'échelle non-linéaire pour nous ramener au plan $(e_1 \sin w_1, e_2 \sin w_2)$. La Figure 6.2 est réalisée avec les paramètres suivants : le rapport des demi-grands axes $\alpha = 0.1$, le rapport des masses $\mu = 0.5$ (c'est-à-dire $m_1 = m_2$) et $\Sigma = 0.01$.

L'Hamiltonien (6.21) est bien continu sur ce plan, qui correspond en fait à un disque. En effet, comme la valeur de Σ est fixée, les excentricités et donc les coordonnées y_i compatibles avec cette valeur sont limitées. Ainsi, afin d'obtenir un disque et non une ellipse, nous avons simplement ajusté les échelles des deux axes.

L'équation (6.14) montre que, pour une valeur fixée de Σ , la valeur maximale de l'*inclinaison mutuelle* entre les deux plans orbitaux, $i_{mut} = i_1 + i_2$, est atteinte à l'origine du disque $e_1 =$

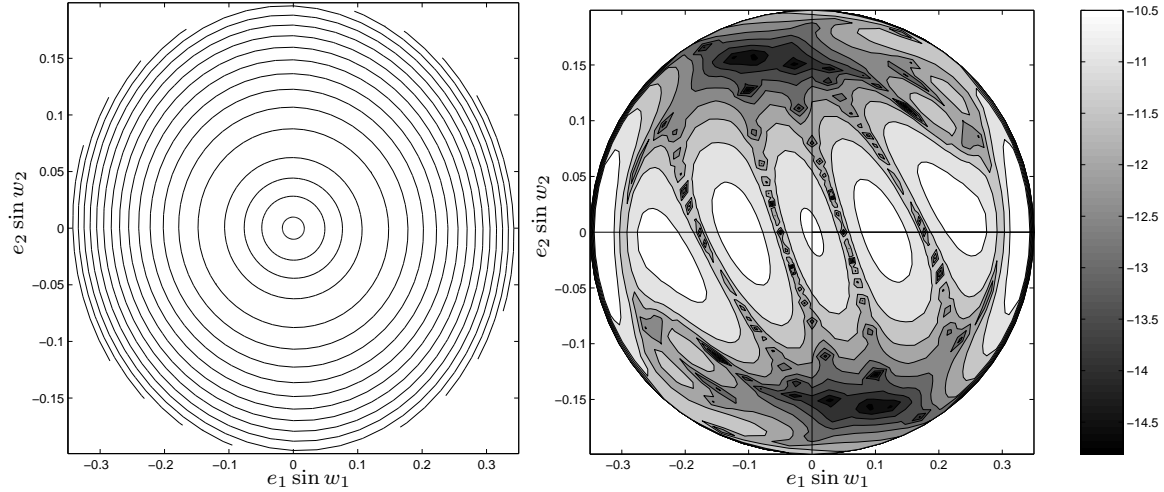


FIG. 6.2: *A gauche* : Courbes d'Hamiltonien constant pour $\alpha = 0.1$, $m_1/m_2 = 1$ et $\Sigma = 0.01$, dans le système de coordonnées $(e_1 \sin w_1, e_2 \sin w_2)$ où w_i vaut 90° du côté positif de l'axe et -90° du côté négatif. *A droite* : Pour le même cas, courbes des différents niveaux de convergence numérique exprimés en échelle logarithmique (base 10).

$e_2 = 0$ et est égale à

$$\max I_{mut} = \arccos \left(\frac{C^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1 L_2} \right). \quad (6.24)$$

Plus l'inclinaison mutuelle est élevée, plus petites sont les excentricités et donc plus grande est la proximité à l'origine du disque représentatif $(e_1 \sin w_1, e_2 \sin w_2)$. Ainsi, le cercle qui entoure la dynamique possible du problème correspond au cas d'orbites coplanaires.

Comme nous l'avons montré en début de section, le centre $e_1 = e_2 = 0$ de la Figure 6.2 constitue bien un équilibre de la fonction hamiltonienne moyennée et réduite à deux degrés de liberté, et plus précisément un minimum. Nous confirmerons analytiquement à la Section 6.3.2 qu'il s'agit bien d'un équilibre stable. Pour ce premier choix des valeurs des paramètres, il correspond à une inclinaison mutuelle de 23.5° . L'existence d'un tel point fixe est mentionnée par [Poincaré, 1892] dans son étude des "solutions de la troisième sorte" (Volume I, paragraphe 48), dans le cas de planètes de petites masses.

L'autre disque de la Figure 6.2 donne une indication quant à la convergence numérique de la série hamiltonienne, exprimée dans le même système de coordonnées que le plan représentatif. Pour mesurer cette convergence numérique, nous avons choisi d'évaluer le rapport de la contribution apportée par l'ordre 12 en excentricités et en inclinaisons par rapport à la valeur totale de l'Hamiltonien. L'échelle présente le logarithme en base 10 de cette mesure. Les couleurs les plus sombres témoignent d'une meilleure convergence numérique. Nous remarquons que cette dernière dépend fortement des valeurs individuelles des excentricités. Néanmoins, la convergence numérique générale lue sur cette figure est excellente (généralement inférieure à 10^{-10}).

6.3 Changement de stabilité de l'équilibre central

6.3.1 Observation géométrique du changement de stabilité

Dans cette section, nous nous centrons sur les changements de comportement induits par une augmentation de la valeur du déficit de moment angulaire : $\Sigma = 0.03$ (Figure 6.3, gauche) et $\Sigma = 0.05$ (Figure 6.3, milieu et droite). La première valeur correspond à une inclinaison mutuelle maximale de 40.9° et la seconde de 53.2° . Dans le premier cas, la forme des courbes d'Hamiltonien constant est plus allongée mais la dynamique est toujours identique dans le sens où l'équilibre central est encore stable.

Ce n'est plus le cas pour des valeurs supérieures du déficit de moment angulaire. En effet, le point fixe est cette fois représenté par un point selle (Figure 6.3, milieu) et deux nouveaux minima apparaissent : le premier en $w_1 = w_2 = 90^\circ$ et le second, par symétrie de l'Hamiltonien, en $w_1 = w_2 = -90^\circ$. En raison de cette symétrie, nous nous limiterons dans la suite au cas $(w_1, w_2) = (-90^\circ, -90^\circ)$. Ces nouveaux minima sont des équilibres de l'Hamiltonien séculaire ; les angles w_1 et w_2 sont en libration à proximité de ceux-ci.

Cette bifurcation de l'équilibre central à haute inclinaison mutuelle en deux équilibres stables proches de ce dernier fut prouvée analytiquement par [Jefferys et Moser, 1966] pour des valeurs très petites des différents paramètres et plus particulièrement pour un rapport des demi-grands axes tendant vers zéro. A l'aide de la théorie KAM, ils ont établi une preuve mathématique de l'existence de solutions quasi-périodiques du problème des trois corps ; la démonstration part de ces équilibres et les perturbe par les termes de courtes périodes. Nos observations ne possèdent bien sûr pas la rigueur mathématique de leurs résultats mais ont cependant l'avantage de les généraliser à un large éventail de valeurs des paramètres.

La convergence numérique de la série (6.21) est estimée, pour $\Sigma = 0.05$, à la figure droite de l'illustration 6.3. La valeur de Σ (et donc celle de l'inclinaison mutuelle maximale également)

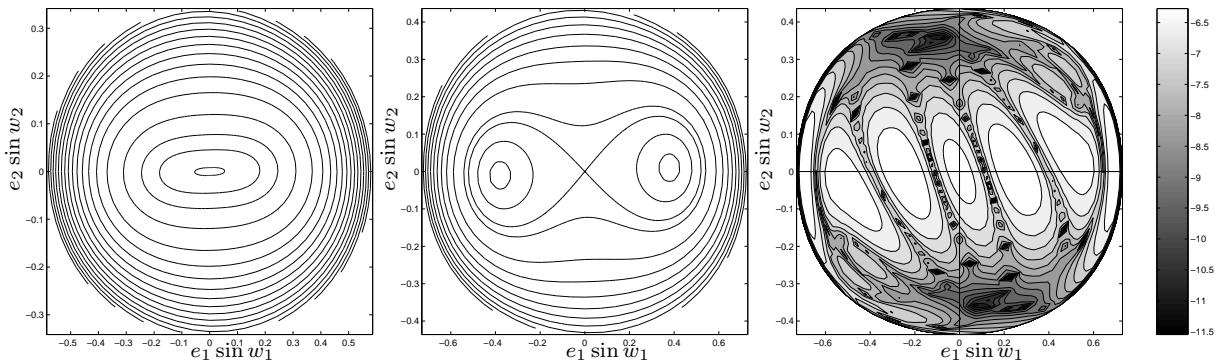


FIG. 6.3: Mêmes représentations qu'à la Figure 6.2 pour des valeurs supérieures du déficit de moment angulaire : $\Sigma = 0.03$ (à gauche) et $\Sigma = 0.05$ (au milieu et à droite)

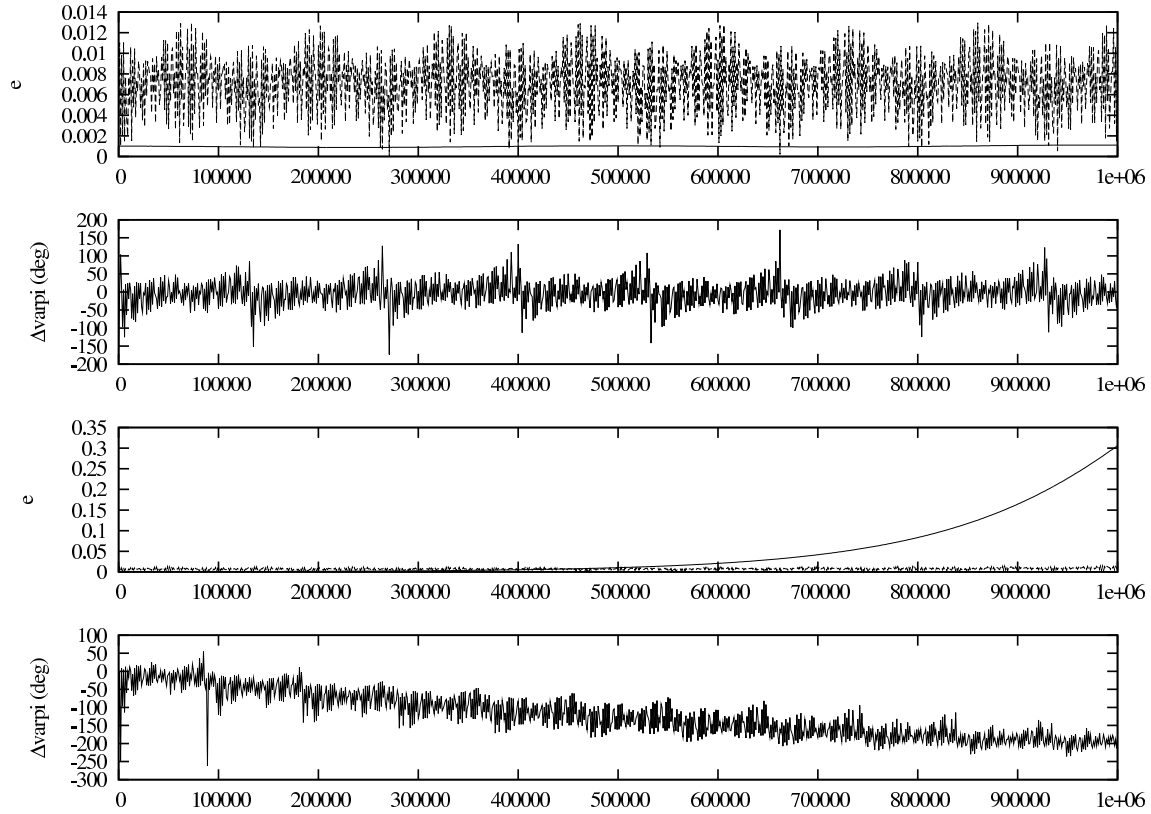


FIG. 6.4: Intégrations numériques (réalisées avec SWIFT) d'un système proche de l'équilibre central ($e_1 = e_2 = 0.001$) dans le cas stable $\Sigma = 0.01$ (deux graphes supérieurs) et d'un système proche du point selle dans le cas instable $\Sigma = 0.05$ (deux graphes inférieurs). Seule l'intégration sur le premier million d'années est représentée. Les paramètres du système sont identiques à ceux des Figures 6.2 et 6.3, c'est-à-dire $\alpha = 0.1$, $m_1/m_2 = 1$, $w_1 = w_2 = -90^\circ$, $\Omega_1 = 180^\circ$, $\Omega_2 = 0^\circ$. Les premier et troisième graphes montrent les évolutions temporelles des excentricités, les autres celles de l'angle $\Delta\varpi$.

ayant augmenté, la convergence numérique n'est plus excellente comme précédemment mais est encore très bonne (principalement comprise entre 10^{-6} et 10^{-11}). Par exemple, la précision obtenue en les nouveaux extrema est de 4.21×10^{-8} et elle est de 7.35×10^{-7} en l'équilibre central.

Les minima (en $w_1 = w_2 = \pm 90^\circ$) de l'Hamiltonien concentré sur ce premier plan représentatif ont été découverts par [Michtchenko et al., 2006b] dans le cas du système ν Andromède. Ces derniers ont dénommé *résonances de Lidov-Kozai* les domaines réguliers entourant ces points fixes, par analogie avec le problème restreint des trois corps.

Dans le cadre du problème restreint, [Kozai, 1962] a montré qu'un astéroïde à hautes excentricité et inclinaison perturbé par Jupiter (considéré sur une orbite circulaire) et hors résonance en moyen mouvement est pourvu d'une variation couplée de son excentricité e et de son inclinaison i de sorte à vérifier la relation $\sqrt{1 - e^2} \cos i = \text{cste}$ (problème des trois corps restreint réduit à un degré de liberté). Pour une inclinaison suffisamment importante, la résonance de

Kozai se produit en $\omega = \pm 90^\circ$ et est telle que $\dot{\omega} = 0$ où ω est l'argument du péricentre du petit corps, ce qui peut être regardé comme une résonance 1/1 entre les fréquences de précession de la longitude du périhélie et de la longitude du noeud du petit corps ($\dot{\varpi} = \dot{\Omega}$).

Dans le cas du problème des trois corps qui nous préoccupe, les résonances de Lidov-Kozai sont caractérisées par une variation couplée de l'excentricité et de l'inclinaison de la planète intérieure et par une libration de l'argument du péricentre de cette même planète autour de $\pm 90^\circ$. Il est à noter que [Michtchenko et al., 2006b] n'ont pas prouvé analytiquement que les minima identifiés à la Figure 6.3 correspondent à des équilibres de l'espace de phase à quatre dimensions. Grâce aux symétries de notre modèle, une telle vérification ainsi qu'une étude de la stabilité de ces équilibres sont possibles et feront l'objet de la prochaine section.

Ce n'est pas la première fois que la résonance de Kozai est évoquée dans l'étude des systèmes extrasolaires. Elle est également décrite dans plusieurs travaux numériques : entre autres, [Innanen et al., 1997], [Wu et Murray, 2003] et [Takeda et Rasio, 2005], tous consacrés aux systèmes d'étoiles binaires (problème restreint des trois corps) et utilisant le mécanisme de Kozai pour montrer qu'à inclinaison mutuelle élevée, l'excentricité de la planète peut subir une oscillation de forte amplitude pouvant expliquer les excentricités très importantes de certaines exoplanètes actuellement observées.

Le changement de stabilité de l'équilibre central est illustré à la Figure 6.4 au moyen d'une intégration numérique du problème des trois corps non-moyenné réalisée avec le logiciel SWIFT. Les conditions initiales du système choisi pour cette intégration sont très proches de celles de l'équilibre ($e_1 = e_2 = 0.001$). Les deux premiers graphes de la Figure 6.4 montrent le comportement du système lorsque Σ est fixé à 0.01 : les excentricités restent proches de leur valeur initiale et la différence angulaire des lignes des apsides $\Delta\varpi$ oscille autour de 0° . Nous constatons que le mouvement reste borné pendant au moins cinq millions d'années. Les deux derniers graphes de la Figure 6.4 confirment la présence de quelque instabilité dans le voisinage de l'équilibre central lorsque $\Sigma = 0.05$. Le système est, en effet, significativement dévié de sa position initiale, l'excentricité de la planète intérieure atteignant la valeur élevée de 0.3 en moins d'un million d'années.

Enfin, nous illustrons également numériquement l'existence des équilibres de Kozai. Pour $\Sigma = 0.05$, notre théorie analytique moyennée par rapport aux courtes périodes localise ces points fixes aux valeurs des excentricités $(e_1, e_2) = (0.3832, 0.0102)$. Nous voyons clairement à la Figure 6.5 que ces conditions initiales particulières produisent un mouvement similaire à celui d'un équilibre faiblement perturbé : les excentricités et inclinaisons ne subissent que de légères variations et les arguments des péricentres de faibles librations autour de 90° dans le cas représenté, et ce durant au moins deux millions d'années. Bien sûr les termes à courtes périodes éliminés dans le processus de moyennisation analytique sont présents dans l'intégration numérique du problème général.

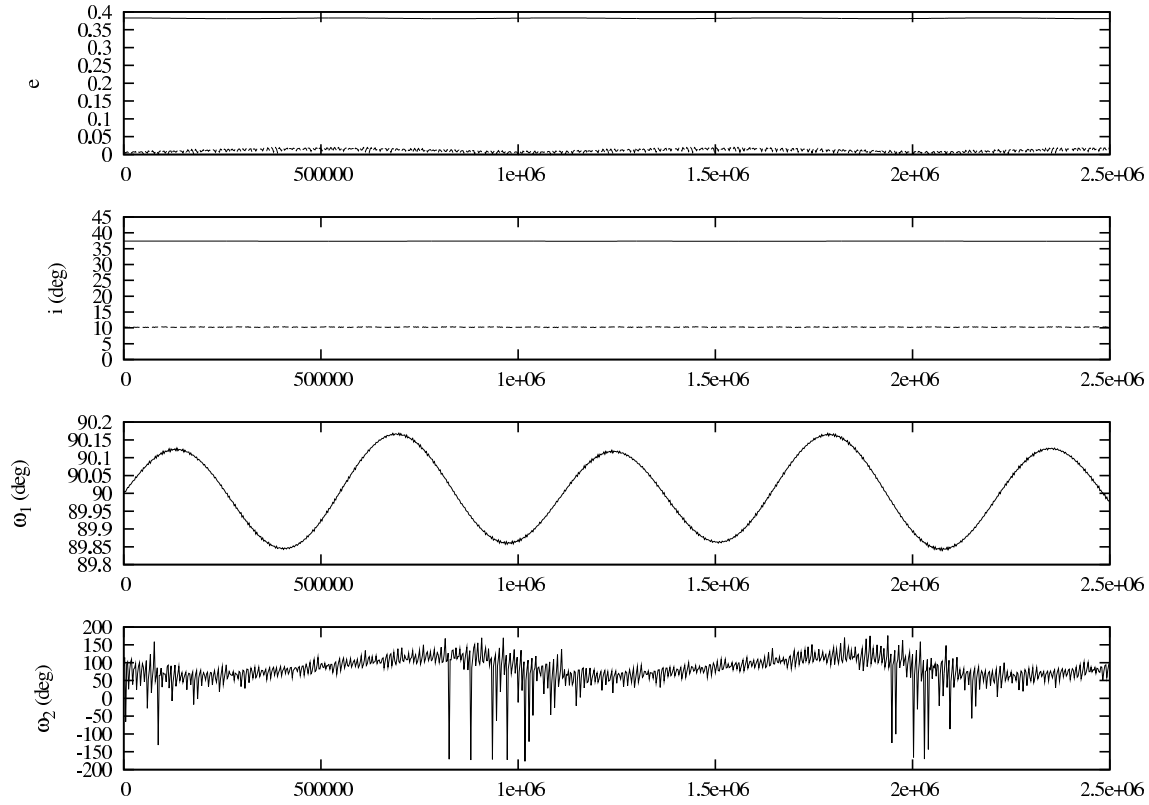


FIG. 6.5: Evolutions temporelles numériques (réalisées avec SWIFT) de, *de haut en bas*, les excentricités, les inclinaisons, les arguments des péricentres de la planète intérieure et de la planète extérieure, de notre approximation du point fixe apparenté à la résonance de Kozai $(e_1, e_2) = (0.3832, 0.0102)$ dans le cas où $\Sigma = 0.05$ (le plan représentatif correspondant se trouve à la Figure 6.3, *milieu*). Les autres paramètres initiaux sont les mêmes que précédemment.

6.3.2 Etude analytique de la stabilité linéaire des équilibres de l'Hamiltonien séculaire

Il est aisé de prouver que les extrema mis en évidence dans les représentations géométriques précédentes correspondent bien à des équilibres du problème séculaire. En effet, les points fixes du système moyenné sont définis par les conditions $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. Selon l'équation (6.23), les dérivées \dot{y}_i s'annulent pour les points situés dans notre plan représentatif ($x_1 = x_2 = 0$). Les conditions nécessaires au calcul des points stationnaires se limitent dès lors à $(\partial\mathcal{K}/\partial y_i) = -\dot{x}_i = 0$. Cela permet de conclure que les valeurs extrémales du plan représentatif (y_1, y_2) sont bien des équilibres du problème séculaire.

Notre modèle fournit une expression analytique facilement calculable des dérivées premières et secondes de l'Hamiltonien. Les valeurs explicites des équilibres sont simplement les racines des fonctions \dot{x}_i et peuvent être obtenues par une méthode itérative, comme la méthode de Newton à deux dimensions, au moyen des expressions des dérivées premières et secondes. Nous constatons qu'en fonction de la valeur de Σ considérée, la fonction possède soit une seule racine ($e_1 = e_2 = 0$), soit trois racines ($e_1 = e_2 = 0$ et les équilibres de Kozai), comme observé

dans les représentations géométriques précédentes.

A présent, concentrons-nous sur l'étude de la stabilité linéaire de ces équilibres, et plus particulièrement sur le changement observé dans la stabilité de l'équilibre central. L'approximation quadratique de l'Hamiltonien dans le voisinage d'un équilibre est donnée par cette formule :

$$2\mathcal{L} = a_{11}s_1^2 + 2a_{12}s_1s_2 + a_{22}s_2^2 + b_{11}S_1^2 + 2b_{12}S_1S_2 + b_{22}S_2^2, \quad (6.25)$$

où $a_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial y_i \partial y_j}\right)^*$, $b_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial x_i \partial x_j}\right)^*$ ($i, j = 1, 2$). Les astérisques signifient que les dérivées partielles doivent être évaluées à l'équilibre et (s_i, S_i) sont les incréments des variables et moments (y_i, x_i) . Afin de dissocier les deux degrés de liberté de cette formulation, nous utilisons les transformations de découplage explicitées dans [Henrard et Lemaître, 2005] et qui nous ont déjà été utiles à la Section 3.3.

Lorsque le quotient de $C = a_{11}b_{12} + b_{22}a_{12}$ sur $A = a_{12}b_{11} + b_{12}a_{22}$ est positif, nous appliquons la même transformation qu'à la Section 3.3, à savoir

$$\begin{aligned} s_1 &= \tilde{s}_1 \cos \phi - \tilde{s}_2 \sin \phi \\ s_2 &= \rho(\tilde{s}_1 \sin \phi + \tilde{s}_2 \cos \phi) \\ S_1 &= \tilde{S}_1 \cos \phi - \tilde{S}_2 \sin \phi \\ S_2 &= (\tilde{S}_1 \sin \phi + \tilde{S}_2 \cos \phi)/\rho, \end{aligned} \quad (6.26)$$

avec $\tan 2\phi = \frac{2b_{12}\rho}{b_{11}\rho^2 - b_{22}}$ et $\rho^2 = C/A$.

Lorsque C/A est négatif, une rotation similaire mais légèrement différente doit être utilisée :

$$\begin{aligned} s_1 &= \tilde{s}_1 \cos \phi - \tilde{s}_2 \sin \phi \\ s_2 &= \rho(-\tilde{s}_1 \sin \phi + \tilde{s}_2 \cos \phi) \\ S_1 &= (\tilde{S}_1 \cos \phi + \tilde{S}_2 \sin \phi)/\cos 2\phi \\ S_2 &= (\tilde{S}_1 \sin \phi + \tilde{S}_2 \cos \phi)/\rho \cos 2\phi, \end{aligned} \quad (6.27)$$

avec $\sin 2\phi = -\frac{2b_{12}\rho}{b_{11}\rho^2 + b_{22}}$ et $\rho^2 = -C/A$.

Ainsi, nous avons réduit l'Hamiltonien à la combinaison linéaire de carrés suivante

$$2\mathcal{L} = (c_{11}\tilde{s}_1^2 + d_{11}\tilde{S}_1^2) + (c_{22}\tilde{s}_2^2 + d_{22}\tilde{S}_2^2). \quad (6.28)$$

Si le produit $c_{ii}d_{ii}$ est positif, le degré de liberté correspondant est stable linéairement. En effet, pour chaque degré à présent découplé, les valeurs propres du système d'équations hamiltoniennes associé valent $\pm\sqrt{-c_{ii}d_{ii}}$ et représentent une situation stable (visuellement un centre) uniquement dans le cas où $c_{ii}d_{ii} > 0$. Dans le cas contraire, le degré de liberté est instable linéairement.

Appliquons à présent cette analyse de stabilité au système fictif étudié dans la section précédente. L'équilibre central est tel que ses deux degrés de liberté sont stables pour des valeurs de Σ plus petites que 0.0312. Pour des valeurs supérieures du déficit de moment angulaire, un des produits devient négatif, ce qui produit l'instabilité géométriquement représentée par un point selle à la Figure 6.3 (milieu). L'autre degré de liberté reste, quant à lui, stable. Concernant le point fixe au centre de la résonance de Kozai, ses deux degrés de liberté sont stables, comme attendu.

6.4 Etude paramétrique de la bifurcation de l'équilibre central

6.4.1 Dépendance de la bifurcation aux paramètres α , μ et Σ

Dans cette section, nous essayons de déterminer dans quelle mesure les rapports des demi-grands axes et des masses influencent la valeur du déficit de moment angulaire Σ à laquelle se produit la bifurcation.

En premier lieu, nous nous concentrons sur la dépendance de la valeur de bifurcation au rapport des masses. La Figure 6.6 comprend les plans représentatifs des courbes d'Hamiltonien constant pour différentes valeurs de ce rapport : de haut en bas, $m_1/m_2 = 0.25, 0.5, 1$ et 2 , le rapport des demi-grands axes étant fixé à 0.1 pour tous les cas envisagés. De gauche à droite, le déficit de moment angulaire vaut respectivement $0.01, 0.03$ et 0.05 . Une première observation est que les équilibres de Kozai sont présents pour tous les rapports de masses de la Figure 6.6, ce qui nous incite à penser que la bifurcation de l'équilibre central est une caractéristique assez générale de la dynamique du problème tridimensionnel.

De plus, lorsque le rapport des masses augmente, les résonances de Kozai apparaissent pour une valeur plus élevée du déficit de moment angulaire ou, de façon équivalente, une valeur plus élevée de l'inclinaison mutuelle maximale.

Nous remarquons aussi que les équilibres se déplacent vers des valeurs de l'excentricité de la planète intérieure plus élevées au fur et à mesure que Σ augmente. A cet effet, la Table 6.2 précise la position des points fixes au centre des résonances de Kozai, pour les valeurs de paramètres illustrées à la Figure 6.6.

Concernant la dépendance au rapport des demi-grands axes, nous déterminons la valeur de Σ à laquelle se produit le changement de stabilité de l'équilibre central pour différents rapports a_1/a_2 . L'inclinaison mutuelle maximale correspondant à ce changement de stabilité est, dans la suite, dénommée *inclinaison mutuelle critique*. Cette dernière est calculée à la Table 6.3 pour quelques rapports de demi-grands axes ($\alpha = 0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3$) et de masses ($m_1/m_2 = 0.01, 0.25, 0.5, 1, 2, 4$). Nous observons que, lorsque le rapport des demi-grands

TAB. 6.2: Coordonnées (e_1, e_2) des équilibres analytiques de Kozai pour les rapports de masses et valeurs de Σ illustrés à la Figure 6.6

m_1/m_2	Σ		
	0.01	0.03	0.05
0.25	-	$(0.575, 4.14 \times 10^{-3})$	$(0.862, 5.48 \times 10^{-3})$
0.5	-	$(0.309, 3.68 \times 10^{-3})$	$(0.579, 8.74 \times 10^{-3})$
1	-	-	$(0.383, 1.02 \times 10^{-2})$
2	-	-	$(0.264, 1.29 \times 10^{-2})$

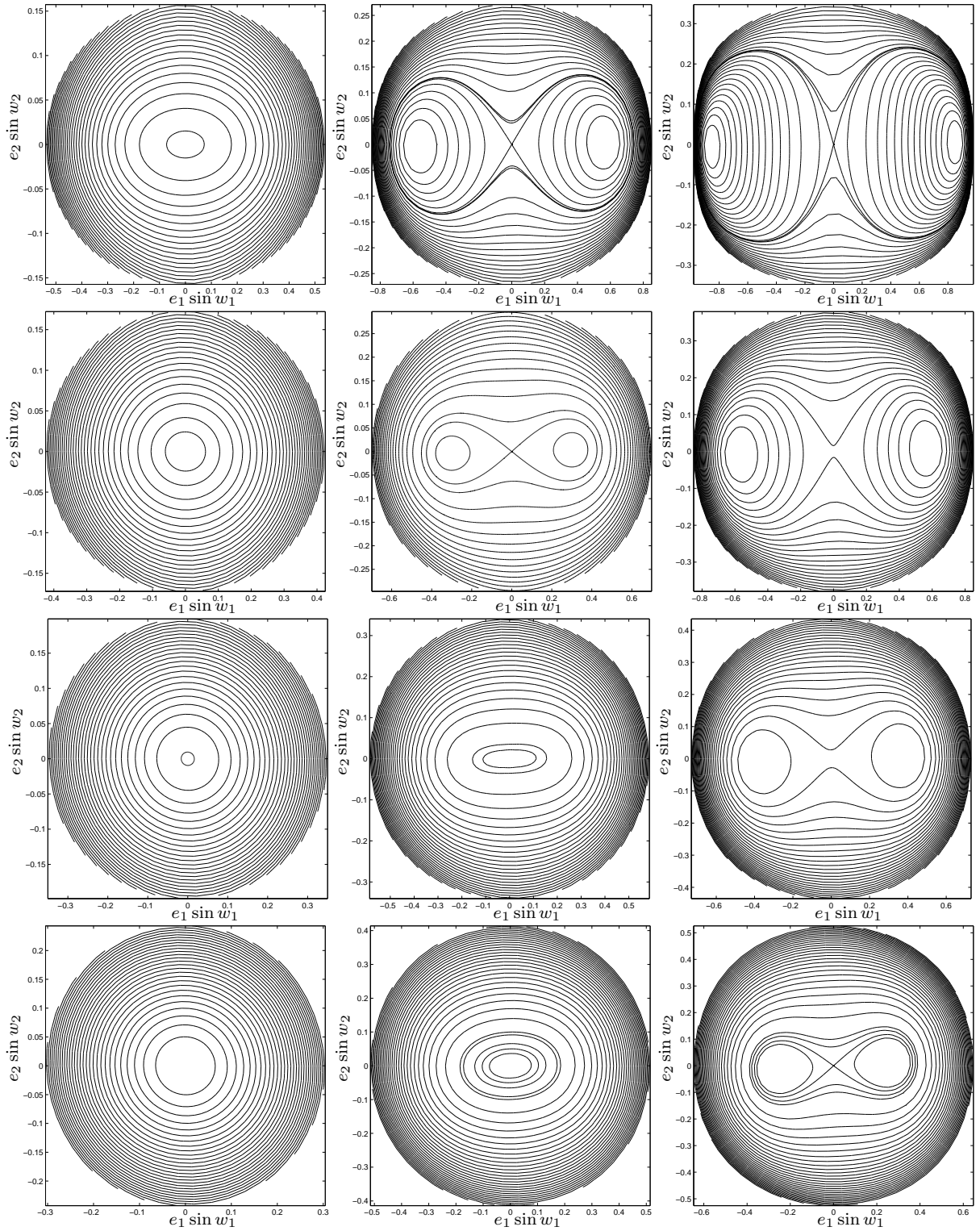


FIG. 6.6: Courbes d'Hamiltonien constant dans le plan représentatif $(e_1 \sin w_1, e_2 \sin w_2)$ où l'on considère les valeurs des paramètres suivantes : $m_1/m_2 = 0.25, 0.5, 1, 2$ (de haut en bas) et $\Sigma = 0.01, 0.03, 0.05$ (de gauche à droite). Dans tous les cas, le rapport des demi-grands axes est fixé à 0.1.

TAB. 6.3: Valeurs en degrés de l'inclinaison mutuelle maximale correspondant au changement de stabilité de l'équilibre central, également appelée inclinaison mutuelle critique, pour plusieurs rapports de masses m_1/m_2 et de demi-grands axes α

m_1/m_2	α						
	0.01	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
0.01	39.24	39.19	39.01	38.67	38.18	37.58	36.80
0.25	39.46	39.67	39.66	39.53	39.21	38.67	37.94
0.5	39.70	40.19	40.38	40.30	40.06	39.61	38.90
1	40.31	41.15	41.72	41.92	41.82	41.46	40.63
2	41.05	42.99	44.15	44.81	44.95	44.57	43.40
4	42.73	46.29	48.50	49.70	50.01	49.18	47.01

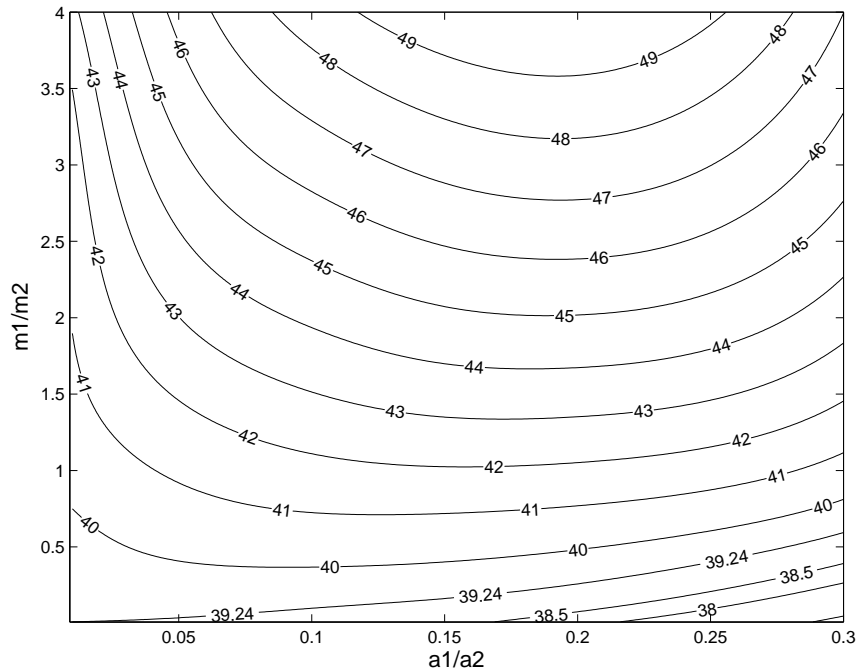


FIG. 6.7: Représentation des courbes d'inclinaison mutuelle critique constante dans le plan $(a_1/a_2, m_1/m_2)$. Les résultats sont donnés pour des rapports de demi-grands axes a_1/a_2 variant de 0.01 à 0.3 et des rapports de masses m_1/m_2 variant de 0.01 à 4.

axes augmente, l'inclinaison mutuelle critique augmente dans un premier temps avant de diminuer dans un second temps.

Pour mieux visualiser la dépendance de la bifurcation aux trois paramètres α , m_1/m_2 et I_{mut} , nous dessinons, à la Figure 6.7, les courbes d'inclinaison mutuelle critique constante dans le plan $(a_1/a_2, m_1/m_2)$. Ce graphe résume toutes les observations précédentes et montre également que, pour les valeurs particulières $\alpha = 0.01$ et $m_1/m_2 = 0.01$, l'inclinaison mutuelle critique vaut 39.24° . Cette dernière est très proche de la valeur $\arccos \sqrt{3/5} \approx 39.23^\circ$ obtenue par [Jefferys et Moser, 1966] sous l'hypothèse d'un rapport de demi-grands axes tendant vers zéro et d'un faible rapport de masses. Cette valeur critique de 39.23° fut initialement introduite dans la littérature par [Kozai, 1962] dans l'étude du problème des trois corps restreint ; de même, les valeurs critiques de la Table 6.3 dans le cas $m_1/m_2 = 0.01$ sont tout à fait en accord avec celles qu'il a calculées pour le problème restreint.

6.4.2 Interprétation de la bifurcation en termes de fréquences

La transformation de découplage (6.26) ou (6.27) permet également de déterminer les valeurs des fréquences linéaires. En effet, si le produit $c_{ii}d_{ii}$ est positif (c'est-à-dire si l'équilibre est stable), nous introduisons, dans l'Hamiltonien (6.28), les variables angle-action

$$\begin{aligned}\tilde{s}_i &= \sqrt{2R_i R_i^*} \sin r_i \\ \tilde{S}_i &= \sqrt{2R_i / R_i^*} \cos r_i,\end{aligned}\tag{6.29}$$

avec $R_i^* = (d_{ii}/c_{ii})^{1/2}$. La fonction hamiltonienne se simplifie alors en l'expression

$$\mathcal{L} = \sqrt{c_{11}d_{11}}R_1 + \sqrt{c_{22}d_{22}}R_2.\tag{6.30}$$

A la Figure 6.8 est représenté le rapport des fréquences linéaires, $\sqrt{c_{22}d_{22}}/\sqrt{c_{11}d_{11}}$, associées à l'équilibre central stable (graphe de gauche) et aux équilibres stables de Kozai (graphe de droite), pour des inclinaisons mutuelles croissantes (I_{mut} de l'équilibre central dans le premier cas, I_{mut} des équilibres de Kozai dans le second cas). Cette figure est obtenue pour les paramètres $\alpha = 0.3$ et $m_1/m_2 = 0.25$. L'inclinaison mutuelle critique vaut, pour cet exemple, 37.94° . Comme attendu, une des fréquences associées à l'équilibre central s'annule à cette valeur de bifurcation.

Pour des inclinaisons mutuelles inférieures à 32.75° , la Figure 6.8 (graphe de gauche) montre que le rapport des fréquences associées à l'équilibre central est compris entre 0.5 et 1. Cette observation est en accord avec les résultats de [Robutel, 1995] qui en a fourni une démonstration analytique dans le cas d'inclinaisons mutuelles faibles. Lorsque l'on considère des inclinaisons mutuelles supérieures à 32.75° , le rapport des fréquences décroît pour finalement atteindre une valeur nulle au moment de la bifurcation.

Enfin, les fréquences associées aux équilibres de Kozai sont dotées du même genre de comportement : pour des inclinaisons mutuelles inférieures à 39.08° , le rapport $\sqrt{c_{22}d_{22}}/\sqrt{c_{11}d_{11}}$ croît jusqu'à une valeur proche de 1, avant de décroître pour des inclinaisons mutuelles supérieures (graphe de droite).

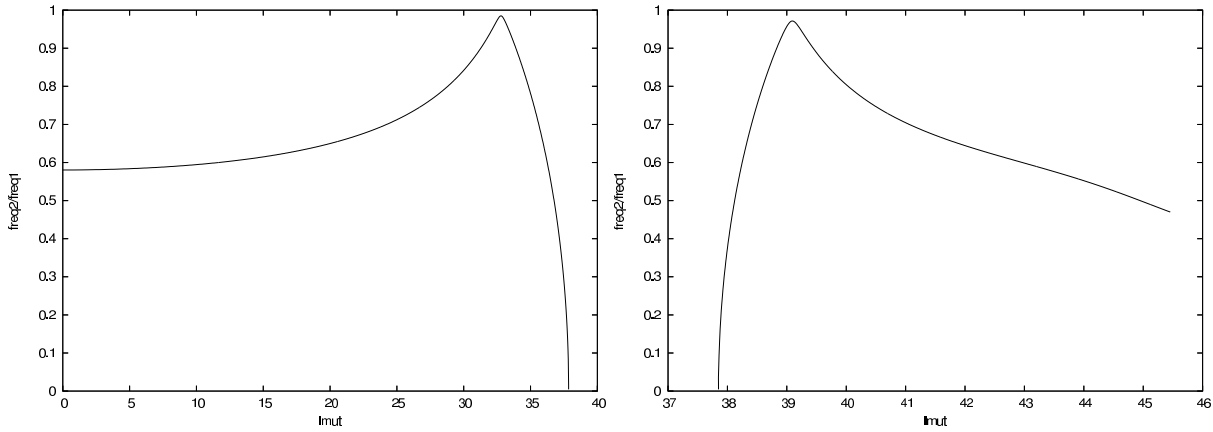


FIG. 6.8: Rapports des fréquences linéaires ($\sqrt{c_{22}d_{22}}/\sqrt{c_{11}d_{11}}$) associées à l'équilibre central stable (*graphe de gauche*) et aux équilibres de Kozai (*graphe de droite*), pour des valeurs croissantes de l'inclinaison mutuelle (*graphe de gauche* : I_{mut} de l'équilibre central, *graphe de droite* : I_{mut} des équilibres de Kozai). Ces graphes sont obtenus en choisissant $\alpha = 0.3$ et $m_1/m_2 = 0.25$. Nous voyons que le rapport des fréquences s'annule à l'inclinaison mutuelle critique, comme attendu.

6.5 Surfaces de section

Afin de mieux comprendre la dynamique du problème et d'identifier les régions de l'espace de phase où le mouvement est régulier et celles où le mouvement est chaotique, nous avons recours aux surfaces de section. Concrètement, nous choisissons de traiter l'exemple de paramètres $\alpha = 0.3$ et $m_1/m_2 = 0.25$, et envisageons l'évolution de la dynamique induite par deux valeurs du paramètre Σ : $\Sigma = 0.02$ et $\Sigma = 0.03$. La première valeur est juste inférieure à la valeur critique ($\Sigma = 0.0206$) en laquelle l'équilibre à l'origine devient instable et la seconde est bien supérieure à la valeur critique. Avant d'étudier plus en détail ce problème, il est utile d'analyser les surfaces de section obtenues pour un problème simplifié, similaire à l'approximation quadratique de l'Hamiltonien dans le voisinage d'un équilibre (cfr Eq. (6.25)).

6.5.1 Un problème simplifié

A proximité de l'équilibre à l'origine lorsqu'il est stable et à proximité des équilibres de Kozai, les trajectoires sont similaires à des combinaisons de deux sinusoïdes de fréquences et amplitudes différentes :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_1^* + A_1 \cos \phi \sin(\beta t) - A_2 \sin \phi \sin t \\
 u_2 &= u_2^* + A_1 \sin \phi \sin(\beta t) + A_2 \cos \phi \sin t \\
 v_1 &= v_1^* + A_1 \cos \phi \cos(\beta t) - A_2 \sin \phi \cos t \\
 v_2 &= v_2^* + A_1 \sin \phi \cos(\beta t) + A_2 \cos \phi \cos t,
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

où (u_i^*, v_i^*) sont les coordonnées de l'équilibre et où (A_1, A_2) sont les amplitudes. L'angle ϕ est l'angle intervenant dans la transformation de découplage et défini à l'équation (6.26) ou (6.27).

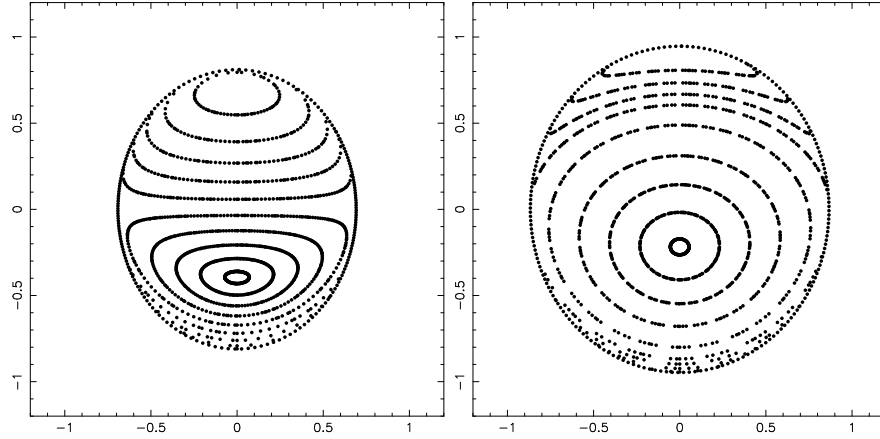


FIG. 6.9: Surfaces de section définies comme $u_2 = 0$ et $\dot{u}_2 > 0$, et projetées sur le plan $(u_1 - u_1^*, v_1 - v_1^*)$, pour le problème simplifié semblable à la linéarisation autour d'un des équilibres de Kozai (ou de tout autre équilibre stable), dans le cas où $\mathcal{T} = 0.15708$ (cfr Eq. (6.32)). La valeur de l'angle de la transformation de découplage modifie grandement la représentation : $\phi = \pi/4$ (à gauche) et $\phi = 0.4$ (à droite).

En accord avec la Section 6.3.2, nous définissons les variables $\tilde{u}_1 = A_1 \sin(\beta t)$, $\tilde{u}_2 = A_2 \sin t$, $\tilde{v}_1 = A_1 \cos(\beta t)$ et $\tilde{v}_2 = A_2 \cos t$. L'Hamiltonien “découplé” \mathcal{T} associé aux solutions (6.31) est le suivant :

$$2\mathcal{T} = (\tilde{u}_2^2 + \tilde{v}_2^2) + \beta(\tilde{u}_1^2 + \tilde{v}_1^2). \quad (6.32)$$

Le but de ce problème simplifié est de montrer l'influence qu'exerce l'angle ϕ de la transformation de découplage sur la représentation des surfaces de section. A cette fin, nous choisissons la surface de section définie par $u_2 = 0$ avec $\dot{u}_2 > 0$ et la reproduisons projetée sur le plan $(u_1 - u_1^*, v_1 - v_1^*)$. Il ne s'agit pas d'une surface de section idéale dans le sens où il existe des trajectoires localement tangentes à celle-ci. En effet, pour certaines amplitudes A_i , les trajectoires présentent des boucles qui peuvent être tangentes à la surface de section. Il n'en reste pas moins que les principales propriétés d'une surface de section sont vérifiées, même si les projections des points la traversant sont entourées par une courbe formée des points tangents (tels que $u_2 = 0$ et $\dot{u}_2 = 0$).

La Figure 6.9 présente deux surfaces de section du problème simplifié de fréquence $\beta = 0.31416$ et d'énergie $\mathcal{T} = 0.15708$ (nous imposons que β soit irrationnel afin d'éviter toute commensurabilité entre les fréquences et choisissons \mathcal{T} de sorte à ce que la taille de la section soit de l'ordre de l'unité). Deux valeurs de l'angle de la transformation de découplage sont envisagées : $\phi = \pi/4$ et $\phi = 0.4$. Nous calculons et dessinons les points de tangence qui forment la frontière de la section ainsi que quelques-unes des courbes de \mathcal{T} constant. Dans le premier cas où $\phi = \pi/4$, les domaines (dans le plan $(u_1 - u_1^*, v_1 - v_1^*)$) autour des points fixes correspondant à $A_1 = 0$ et à $A_2 = 0$ ont la même importance. Par contre, le second cas correspondant à $\phi = 0.4$ est tel que $\sin \phi \approx 0.39$ est inférieur à $\cos \phi \approx 0.92$, ce qui explique que le domaine entourant le point fixe supérieur $A_2 = 0$ est réduit (cfr l'Eq. (6.31)).

Concernant le problème des trois corps tridimensionnel (cfr Section 6.5.2), l'angle ϕ est de l'ordre de 10^{-2} et le domaine associé à la première fréquence domine réellement la projection sur le plan (x_1, y_1) tandis que l'autre domaine est, par conséquent, microscopique. Inversement, le plan (x_2, y_2) contient essentiellement le domaine associé à la seconde sinusoïde. Les centres des domaines sont des membres des deux familles de Lyapunov d'orbites périodiques émanant de l'équilibre stable. Dans la suite, nous appellerons *famille dominante* la famille de Lyapunov entourée d'un large domaine dans le plan (x_1, y_1) . Bien entendu, ce choix est arbitraire : si, au contraire, nous avons sélectionné le plan (x_2, y_2) pour accueillir les surfaces de section, l'autre famille de Lyapunov aurait été qualifiée de famille dominante.

6.5.2 Le problème séculaire des trois corps

Concentrons-nous à nouveau sur le problème initial ($\alpha = 0.3, m_1/m_2 = 0.25$ et deux valeurs de Σ : $\Sigma = 0.02$ et $\Sigma = 0.03$). Nous définissons la surface de section par $x_2 = 0$ (i.e. $w_2 = \pm 90^\circ$) avec $\dot{x}_2 < 0$ et nous intéressons à la projection dans le plan $(e_1 \cos w_1, e_1 \sin w_1)$.

Lorsque $\Sigma = 0.02$, le mouvement est très régulier comme le montre la Figure 6.10. Le dernier graphe de cette figure n'est autre que le disque représentatif $(e_1 \sin w_1, e_2 \sin w_2)$ de la Section 6.2 et stipule les trois niveaux d'énergie que nous désirons étudier ($\mathcal{K} = -0.0139$, $\mathcal{K} = -0.013$ et $\mathcal{K} = -0.01$). Les surfaces de section représentant ces trois niveaux d'énergie (trois premiers graphes de la Figure 6.10) sont centrées sur le point fixe correspondant, selon notre convention, à un membre de la famille de Lyapunov dominante d'orbites périodiques émanant de l'équilibre central à excentricités nulles. Le domaine entourant l'autre point fixe (correspondant à l'autre famille de Lyapunov d'orbites périodiques) est à peine visible en haut des deuxième et troisième graphes de la Figure 6.10. Ces trois niveaux sont caractérisés par une circulation des arguments des péricentres w_1, w_2 . La différence angulaire $\Delta w = w_1 - w_2$ est, quant à elle, en libration autour de 180° à proximité du point fixe appartenant à la famille de Lyapunov dominante et autour de 0° dans la région entourant l'autre orbite de Lyapunov. Entre les deux, Δw circule. Remarquons qu'il n'y a pas de séparatrice entre les deux régions et, par conséquent, pas de différence du point de vue dynamique entre les deux mouvements.

Le second cas, $\Sigma = 0.03$, est plus intéressant (cfr Figure 6.11). L'équilibre à l'origine est à présent un point selle et a donné naissance à deux équilibres stables, les équilibres de Kozai, comme en témoigne le graphe inférieur droit de la Figure 6.11 illustrant le disque représentatif correspondant à ce nouveau niveau de déficit de moment angulaire. Y sont dessinées les courbes associées aux sept niveaux d'énergie que nous choisissons d'analyser. Quand l'équilibre central devient instable, il ne génère qu'une famille d'orbites périodiques qui est instable. Comme nous le verrons, cette instabilité domine une grande partie de l'espace de phase.

Les équilibres de Kozai ($x_1^* = x_2^* = 0, y_1^* = \pm 0.1097, y_2^* = \pm 0.0089$) correspondent à la valeur minimale de l'Hamiltonien $\mathcal{K} = -0.0206$. La surface de section est alors réduite à seulement deux points. Pour des valeurs d'énergie légèrement supérieures, les trajectoires sont telles que les deux arguments des péricentres sont en libration autour de $\pm 90^\circ$. Mais très

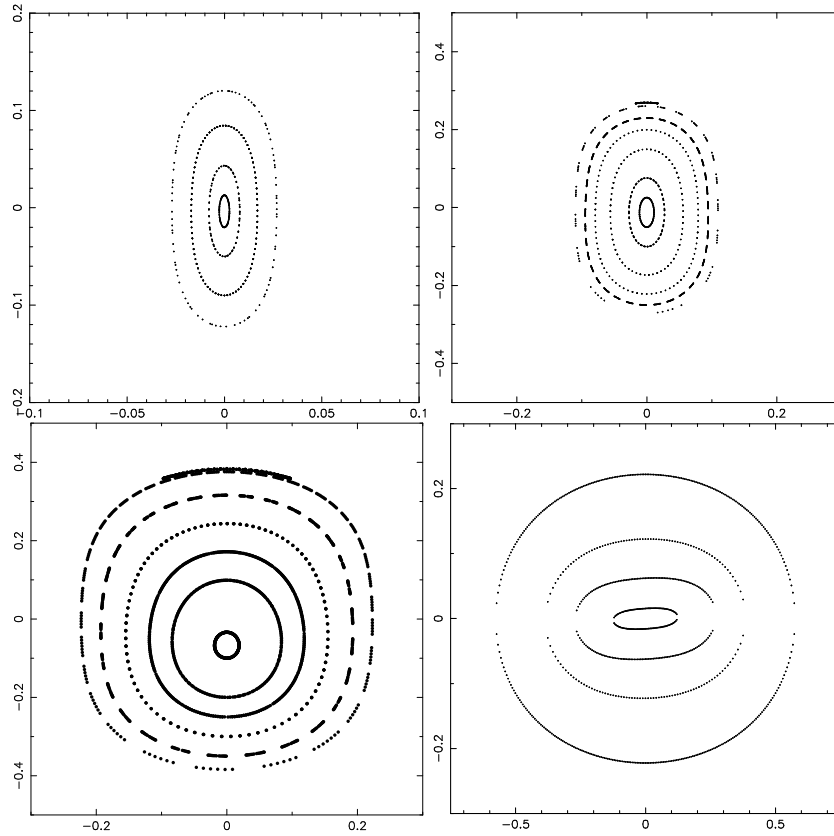


FIG. 6.10: Surfaces de section définies comme $x_2 = 0$ avec $\dot{x}_2 < 0$, projetées sur le plan $(e_1 \cos w_1, e_1 \sin w_1)$, dans le cas où $\alpha = 0.3, m_1/m_2 = 0.25$ et $\Sigma = 0.02$. Les différents graphes correspondent aux valeurs suivantes de l'Hamiltonien : -0.0139 (graphe supérieur gauche), -0.013 (graphe supérieur droit), -0.01 (graphe inférieur gauche). Dernier graphe : courbes liées à ces trois niveaux d'énergie dans le disque représentatif $(e_1 \sin w_1, e_2 \sin w_2)$. La courbe la plus extérieure est la frontière du disque correspondant au problème plan.

vite, y_2^* étant très faible, l'argument w_2 commence à circuler tandis que l'autre argument w_1 reste en libration. Cette évolution est facilement observable sur le disque représentatif. Lorsque $\mathcal{K} = -0.0195$ (graphe **a** de la Figure 6.11), la surface de section se limite à deux disques et la dynamique semble être régulière. Le centre de chaque disque est, selon notre convention, un membre de la famille dominante d'orbites périodiques issues des équilibres de Kozai et, proche des points fixes, l'angle w_1 est en libration autour de $\pm 90^\circ$. Les points fixes attachés à l'autre famille de Lyapunov d'orbites périodiques sont très proches du bord inférieur de chaque disque mais leur domaine d'influence est trop faible que pour pouvoir être aperçu.

Lorsque $\mathcal{K} = -0.019$ (graphe **b**), les deux disques ont fusionné et les variétés stables et instables de l'orbite de la famille instable d'orbites périodiques issue de l'équilibre central sont responsables de la présence de la zone chaotique. Les membres de la famille de Lyapunov dominante émanant des équilibres de Kozai commandent encore une importante région régulière, tandis que les petits domaines réguliers autour des membres de l'autre famille sont engloutis

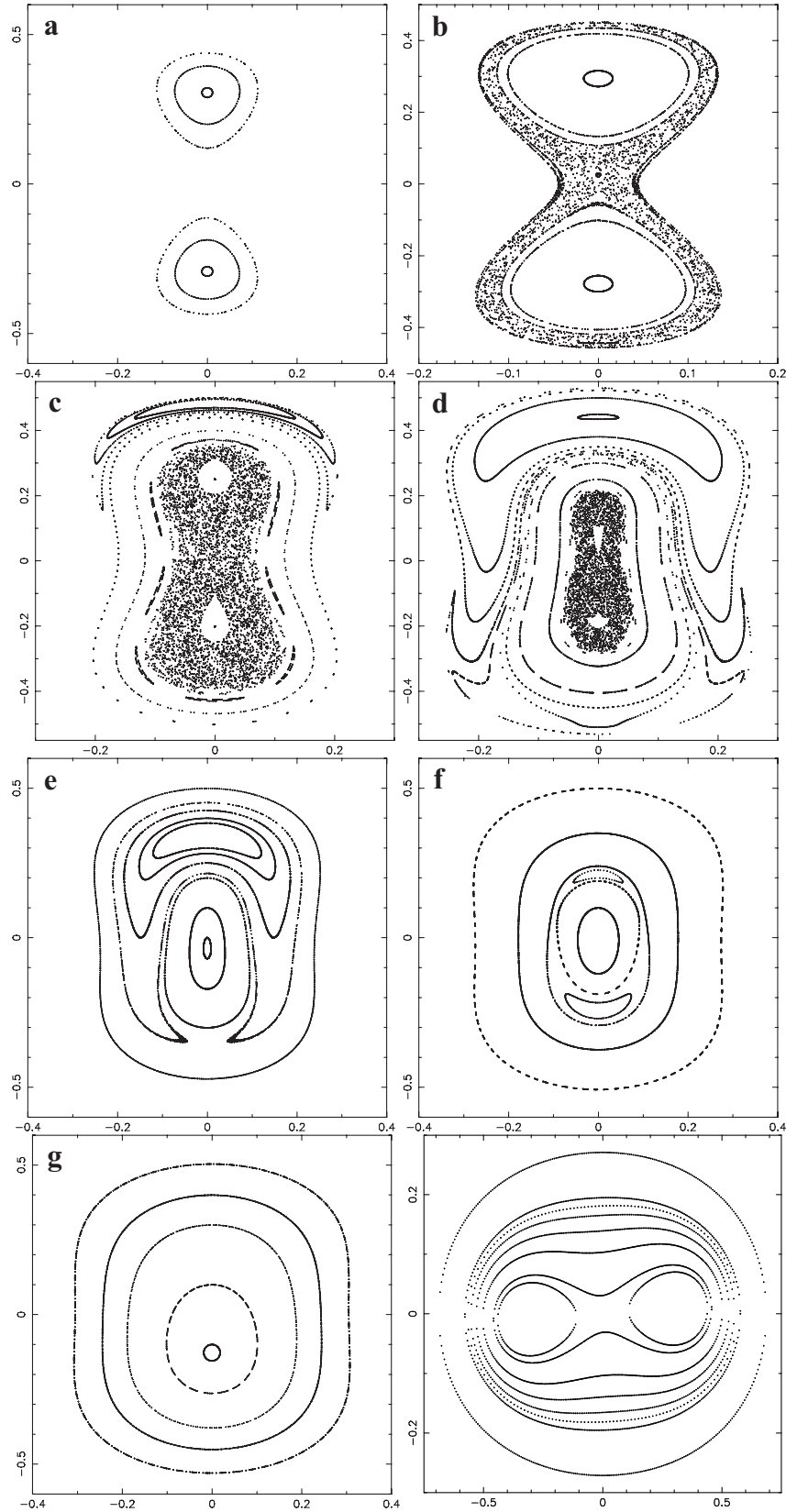


FIG. 6.11: Surfaces de section définies comme $x_2 = 0$ avec $\dot{x}_2 < 0$, projetées sur le plan $(e_1 \cos w_1, e_1 \sin w_1)$, dans le cas où $\alpha = 0.3, m_1/m_2 = 0.25$ et $\Sigma = 0.03$. Les différents graphes notés de **a** à **g** correspondent respectivement aux valeurs suivantes de l'Hamiltonien : $-0.0195, -0.019, -0.017, -0.015, -0.013, -0.0115$ et -0.01 . *Grappe inférieure droite* : courbes des mêmes niveaux d'énergie dans le disque représentatif $(e_1 \sin w_1, e_2 \sin w_2)$.

dans la zone chaotique et sont à peine visibles au centre (sous forme d'un très petit disque) et sur le bord inférieur de la surface de section (sous forme d'une ellipse allongée). A proximité des deux orbites de Lyapunov, l'argument du péricentre de la planète intérieure w_1 est en libration, tandis qu'il circule aux extrémités de la surface de section.

La zone chaotique générée par l'orbite périodique centrale instable peut donc être interprétée comme la frontière de la résonance de Kozai, bien qu'elle divise cette dernière en deux : une partie principale autour de l'orbite dominante de Lyapunov et une autre exiguë autour de l'autre orbite. Il était déjà évident, à la Figure 6.9 du problème simplifié, que la résonance de Kozai est particulière dans le sens où elle possède deux centres. Ces observations nous incitent à penser que la libration de l'angle w_1 peut être considérée plus comme une conséquence du fait que les équilibres de Kozai sont éloignés du centre à partir duquel l'angle est défini, que comme la preuve évidente d'une résonance.

Concernant le niveau $\mathcal{K} = -0.017$ (graphe **c**), les régions régulières autour des orbites de Lyapunov dominantes se rétrécissent et celles autour des autres orbites de Lyapunov sont à présent trop minces pour pouvoir être observées. Une nouvelle caractéristique apparaît au sommet de la figure : une région en forme de banane où la différence angulaire Δw est en libration autour de 0° . En fait, le centre de cette zone est une orbite périodique appartenant à la famille de Lyapunov des orbites périodiques émanant de l'équilibre central (en effet, cette famille instable, une fois l'équilibre quitté, atteint un maximum d'énergie et redescend au niveau d'énergie de cette figure avec une amplitude plus large et une stabilité différente ; pour une étude plus complète des différentes familles d'orbites périodiques et de leur bifurcation, nous renvoyons à [Henrard et Libert, en préparation]). Cette même évolution se poursuit en $\mathcal{K} = -0.015$ (graphe **d**).

Lorsque $\mathcal{K} = -0.013$ (graphe **e**), la zone chaotique centrale a disparu, l'orbite périodique de la famille issue de l'équilibre central est devenue stable et les deux orbites dominantes ont bifurqué en cette dernière (le même genre de bifurcation est une caractéristique importante du problème restreint – cfr [Henrard, 2002]). Par conséquent, les résonances de Kozai ont disparu et seule une circulation de l'argument de la planète intérieure est à présent possible.

En $\mathcal{K} = -0.0115$ (graphe **f**), le point fixe instable au bas du diagramme précédent (de coordonnée $e_1 = 0.35483$ et ne générant apparemment pas de région chaotique importante) est à nouveau stable (entouré par une région de libration de l'angle Δw autour de 180°). Enfin, au dernier niveau d'énergie considéré $\mathcal{K} = -0.01$ (graphe **g**), seul le point fixe central est présent (au centre d'une libration de l'angle Δw autour de 180°) et la dynamique semble être tout à fait régulière.

Ainsi, la dynamique du problème séculaire des trois corps est commandée par la présence et l'évolution de quelques familles principales d'orbites périodiques. Comme le montrent les différentes figures décrites ci-dessus, ces dernières font partie du type d'orbites périodiques symétriques par rapport aux axes y_i (cfr définition à la Section 6.1.2).

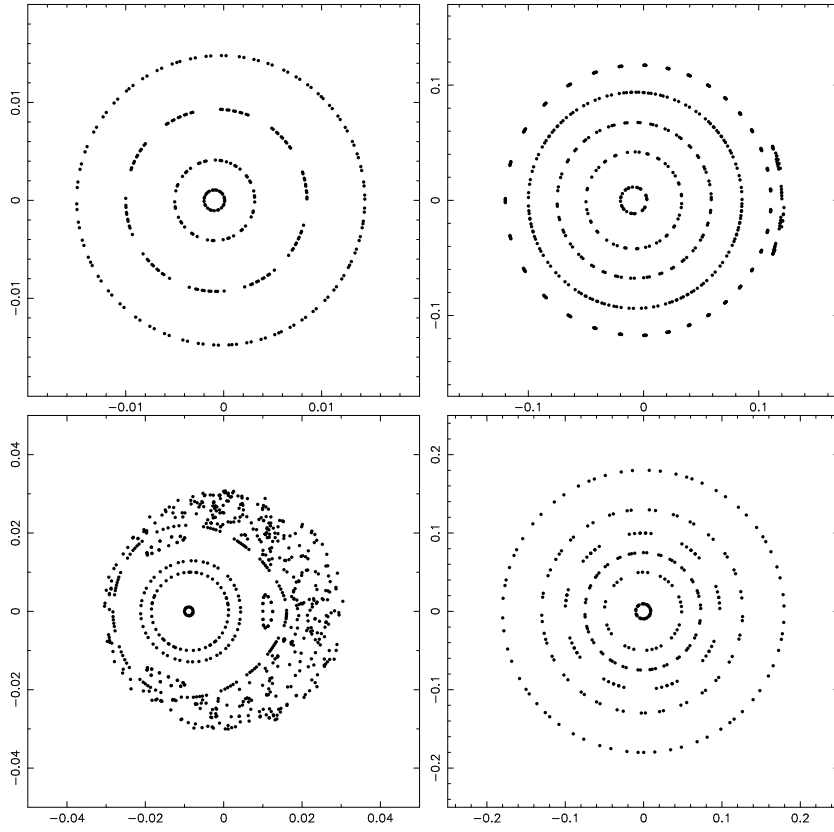


FIG. 6.12: Surfaces de section définies comme $y_1 = 0$ avec $\dot{y}_1 < 0$, projetées sur le plan $(e_2 \cos w_2, e_2 \sin w_2)$, dans le même cas que précédemment où $\alpha = 0.3, m_1/m_2 = 0.25$ et $\Sigma = 0.02$ (*au-dessus*), $\Sigma = 0.03$ (*en dessous*). Les différents graphes correspondent aux valeurs suivantes de l'Hamiltonien : -0.0139 (*graphe supérieur gauche*), -0.01 (*graphe supérieur droit*), -0.019 (*graphe inférieur gauche*), -0.0115 (*graphe inférieur droit*).

Finalement, nous terminons cette étude par une vue complémentaire du même problème : les surfaces de section définies cette fois comme $y_1 = 0$ avec $\dot{y}_1 < 0$ et projetées sur le plan $(e_2 \cos w_2, e_2 \sin w_2)$. Comme l'a illustré le problème simplifié de la Section 6.5.1, lorsque l'angle de la transformation de découplage ϕ est comme ici très petit, le plan $(e_2 \cos w_2, e_2 \sin w_2)$ décrit essentiellement le domaine en lien avec la seconde sinusoïde (cfr Eq. (6.31)). Par conséquent, les graphes supérieurs de la Figure 6.12, pour lesquels $\Sigma = 0.02$ ($\mathcal{K} = -0.0139$ à gauche et $\mathcal{K} = -0.01$ à droite), représentent cette fois le voisinage du point fixe lié à la famille de Lyapunov qui n'était pas dominante dans les surfaces de section précédentes. A proximité de celui-ci, l'angle Δw est en libration autour de 0° et circule lorsque l'on s'en écarte. A nouveau, la transition entre ces différents comportements est régulière et n'implique pas de séparatrice ; il ne s'agit donc pas d'une particularité dynamique mais simplement d'une caractéristique cinématique. Quant à la région entourant l'orbite précédemment dominante (en relation avec une libration de Δw autour de 180°), elle est à peine visible à la figure supérieure droite.

Les graphes inférieurs correspondent à un déficit de moment angulaire de $\Sigma = 0.03$ et à une énergie de $\mathcal{K} = -0.019$ (à gauche) et de $\mathcal{K} = -0.0115$ (à droite). Comme attendu, une grande

région chaotique est présente au premier niveau d'énergie. La surface de section étant définie par $y_1 = 0$ (i.e. $w_1 = 0^\circ$ ou 180°), cette caractéristique a déjà été décrite dans l'étude numérique de [Michtchenko et al., 2006b] (demi-plan supérieur de leur représentation géométrique) et peut, grâce à l'étude analytique menée ici, être expliquée par le changement de stabilité de l'équilibre central à haute inclinaison mutuelle. De plus, une région de possible libration de la différence des arguments des péricentres Δw autour de 0° est également présente proche du point fixe lié à la famille non-dominante de Lyapunov émanant d'un des équilibres de Kozai. La dynamique du second niveau d'énergie semble être, quant à elle, régulière, ce qui est en accord avec le graphe **f** de la Figure 6.11. A proximité du point fixe lié à l'équilibre central (situé très près du centre du plan $(e_2 \cos w_2, e_2 \sin w_2)$), la différence angulaire Δw est en libration autour de 0° et la transition à un domaine de circulation n'implique, cette fois encore, pas de séparatrice.

Cette série de surfaces de section confirme l'étendue de la région chaotique décrite par [Michtchenko et al., 2006b]. En outre, notre étude analytique fournit également un aperçu plus précis de la dynamique du problème dans le sens où elle révèle la cause de ce comportement chaotique et décrit en détail l'évolution des différents centres de libration.

6.6 Autre plan représentatif et équilibres supplémentaires

Les sections précédentes se sont attachées à l'étude du plan représentatif obtenu en fixant les arguments des péricentres à $\pm 90^\circ$. Celui-ci a témoigné du rôle du changement de stabilité de l'équilibre à haute inclinaison mutuelle dans l'apparition de la résonance de Kozai. D'autres valeurs des arguments des péricentres méritent également d'être envisagées, comme par exemple 0° ou 180° . A cet effet, nous définissons un second plan représentatif $(e_1 \cos w_1, e_2 \cos w_2)$ de manière à ce que l'angle w_i égale 0° du côté positif de l'axe et 180° du côté négatif.

Nous choisissons de présenter l'évolution du système de paramètres $\alpha = 0.05$ et $m_1/m_2 = 0.25$. L'étude précédente, plus particulièrement la Table 6.3, nous a appris que le point fixe d'excentricités nulles est, dans ce cas, un équilibre linéairement stable pour des valeurs de Σ inférieures à 0.00981, ce qui équivaut à une inclinaison mutuelle critique de 39.67° . Concentrons-nous sur l'évolution, dans le plan représentatif $(e_1 \cos w_1, e_2 \cos w_2)$, de la dynamique liée à des valeurs supérieures du déficit de moment angulaire : 0.01 (graphe supérieur gauche de la Figure 6.13), 0.03 (graphe supérieur droit) et 0.05 (graphe inférieur gauche). Le graphe inférieur droit de la Figure 6.13 assure que la convergence numérique de la série (6.21) est vérifiée (inférieure à 10^{-6} pour les excentricités qui nous intéressent), même pour une valeur de Σ aussi élevée que 0.05.

Lorsque $\Sigma = 0.01$ et $\Sigma = 0.03$, seul l'équilibre instable d'excentricités nulles est présent et correspond à des inclinaisons mutuelles maximales de 40.1° et 72.3° respectivement. La forme des courbes d'Hamiltonien constant est plus allongée pour des valeurs de Σ plus élevées, mais cette fois l'étirement se produit le long de l'axe e_2 . Pour des valeurs supérieures du déficit de

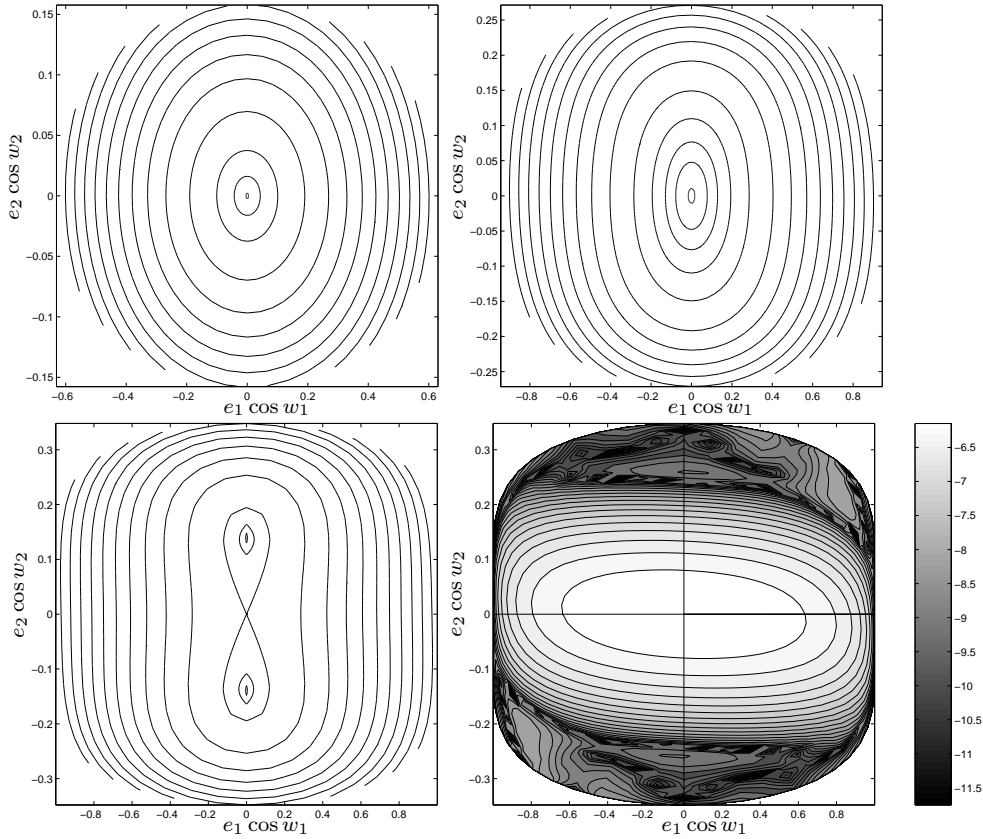


FIG. 6.13: Courbes d'Hamiltonien constant pour $\alpha = 0.05$ et $m_1/m_2 = 0.25$, dans le système de coordonnées $(e_1 \cos w_1, e_2 \cos w_2)$ où w_i vaut 0° du côté positif de l'axe et 180° du côté négatif. Les valeurs du déficit de moment angulaire considérées sont 0.01 (graphe supérieur gauche), 0.03 (graphe supérieur droit) et 0.05 (graphe inférieur gauche). Graphe inférieur droit : Pour ce dernier cas, courbes des différents niveaux de convergence numérique exprimés en échelle logarithmique (base 10).

moment angulaire, telle celle du graphe inférieur droit de la Figure 6.13, l'équilibre central est schématisé par un point selle et deux nouveaux équilibres apparaissent, l'un en $w_1 = w_2 = 0^\circ$ et l'autre, par symétrie de l'Hamiltonien, en $w_1 = w_2 = 180^\circ$. Ces équilibres naissent précisément en $\Sigma = 0.0423$ et correspondent alors à une inclinaison mutuelle critique de 88.5° . La précision mesurée vaut, lorsque $\Sigma = 0.05$, 1.1×10^{-6} en l'équilibre d'excentricités nulles et 2.6×10^{-7} en les nouveaux extrema, et est tout à fait acceptable.

L'équilibre central étant dépeint aux graphes supérieurs de la Figure 6.13 comme un point fixe stable, cela montre une fois de plus que la stabilité des équilibres ne peut pas être inférée des plans représentatifs mais doit faire l'objet d'une étude de stabilité identique à celle de la Section 6.3.2.

Selon l'équation (6.23), ce sont cette fois les dérivées \dot{x}_i qui s'annulent pour les points situés dans notre second plan représentatif ($y_1 = y_2 = 0$). Dès lors, seules les conditions $(\partial \mathcal{K} / \partial x_i) = \dot{y}_i = 0$ sont à prendre en considération dans le calcul des points stationnaires. En

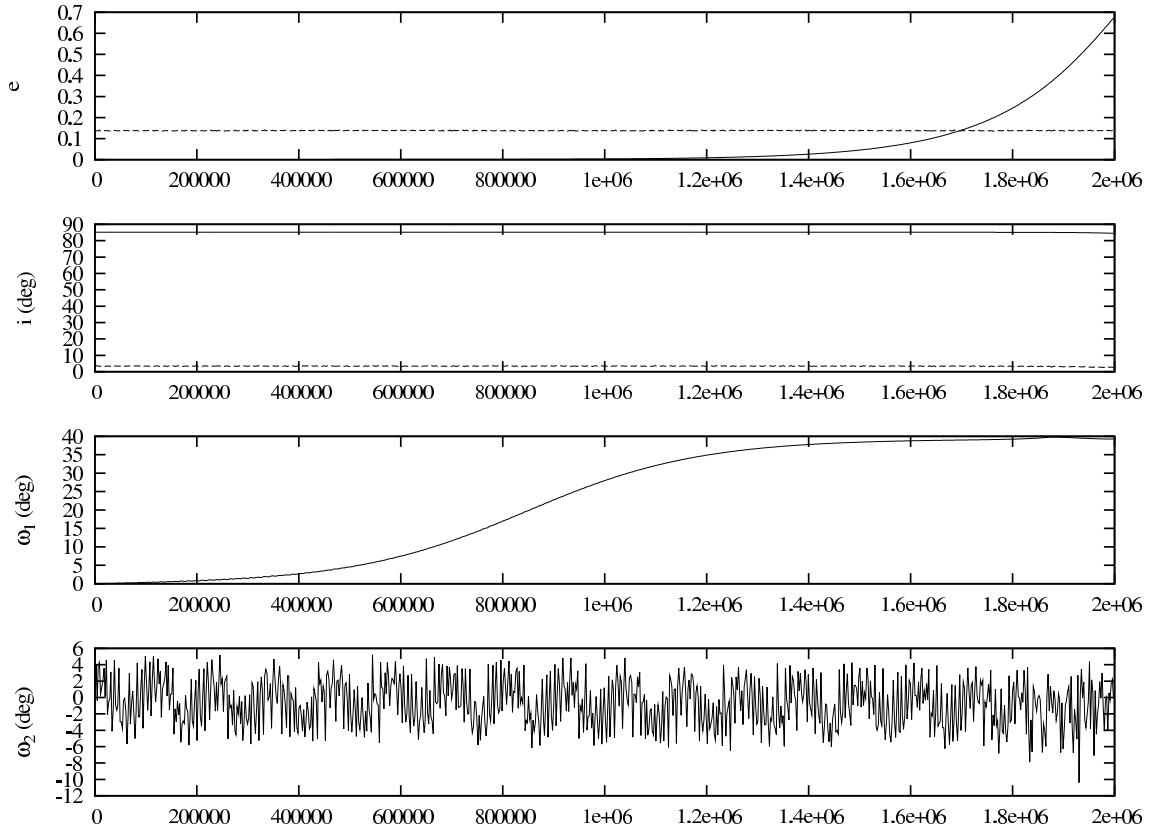


FIG. 6.14: Evolutions temporelles numériques (réalisées avec SWIFT) de, de haut en bas, les excentricités, les inclinaisons, les arguments des péricentres de la planète intérieure et de la planète extérieure de notre approximation du point fixe $(e_1, e_2) = (0.00107, 0.13934)$ présent à la Figure 6.13 (*graphe inférieur gauche*). Les autres paramètres initiaux sont $\alpha = 0.05$, $m_1/m_2 = 0.25$, $w_1 = w_2 = 0^\circ$, $\Omega_1 = 180^\circ$, $\Omega_2 = 0^\circ$.

fonction de la valeur prise par Σ , la fonction possède une ou trois racines. Comme précédemment, nous étudions la stabilité linéaire de ces équilibres en découplant les degrés de liberté de l'approximation quadratique de l'Hamiltonien dans le voisinage des équilibres.

Concernant l'équilibre d'excentricités nulles, nous trouvons qu'un des degrés de liberté devient instable en $\Sigma = 0.00981$ (c'est-à-dire à l'apparition des équilibres de Kozai) et n'est en rien modifié par l'apparition des équilibres supplémentaires. Quant à ces derniers, ils sont également instables puisqu'un des produits $c_{ii}d_{ii}$ est négatif. Malgré une représentation géométrique fort semblable, la dynamique représentée sur ce second plan représentatif est donc très différente de celle présentant les équilibres stables de Kozai.

Enfin, l'existence et la stabilité du nouvel équilibre en $w_1 = w_2 = 0^\circ$ sont illustrées à la Figure 6.14 par une intégration numérique du système sur deux millions d'années. L'instabilité y est évidente.

Dernièrement, l'existence de ces équilibres supplémentaires a également été détectée numériquement par [Migaszewski et Goździewski, en préparation] au moyen d'une étude très semblable à celle menée par [Michtchenko et al., 2006b] et portant sur le système extrasolaire HD

12661. Cela confirme donc l'exactitude de notre modèle analytique, et ce malgré des inclinaisons mutuelles maximales assez importantes.

6.7 Lien avec le problème séculaire coplanaire des trois corps

Au Chapitre 3, nous avons abordé l'analyse séculaire des systèmes coplanaires au moyen d'un développement en excentricités de la fonction perturbatrice. La réduction du problème à un seul degré de liberté et la conséquente possible représentation de l'espace de phase ont mis en évidence l'existence de plusieurs équilibres du problème réduit. Le but de cette section est de reproduire, munis cette fois de l'approche tridimensionnelle, les mêmes résultats et en particulier la résonance séculaire non-linéaire à modérées et hautes excentricités découverte par [Michtchenko et Malhotra, 2004] (cfr Section 3.4).

Pour ce faire, nous concentrons notre attention sur le domaine d'inclinaison mutuelle nulle. Comme cette région est située sur le bord du disque représentatif de la Section 6.2, nous préférons utiliser un autre plan représentatif introduit par [Michtchenko et al., 2006b] : le plan $(e_1 \cos \Delta\varpi, I_{mut} \cos 2w_1)$. Nous choisissons de discuter le même système fictif que celui des Figures 3.9, 3.10 et 3.11 ($\alpha = 0.166, m_1/m_2 = 1$) et d'analyser les valeurs du déficit de moment angulaire $\Sigma = 0.1$ et $\Sigma = 0.13$ (qui correspondent, dans les notations du Chapitre 3, respectivement à $U = 0.1$ et $U = 0.13$). Le problème séculaire coplanaire réduit à un seul degré de liberté $-(v, V)$ dans les notations du Chapitre 3 ou $(w_1 - w_2, W_1)$ pour reprendre les notations des variables (6.8)– est caractérisé, lorsque $\Sigma = 0.1$, par deux équilibres : $(e_1, e_2) = (0.32, 0.57)$ en $\Delta\varpi = 0^\circ$ et $(0.59, 0.48)$ en $\Delta\varpi = 180^\circ$. Une valeur supérieure du déficit de moment angulaire telle que $\Sigma = 0.13$ voit se former la zone de résonance séculaire non-linéaire et dès lors l'existence de quatre équilibres (cfr Section 3.4) : $(0.42, 0.63)$, $(0.74, 0.49)$ et $(0.90, 0.26)$ en $\Delta\varpi = 0^\circ$; $(0.59, 0.58)$ en $\Delta\varpi = 180^\circ$. Tous ces équilibres du problème réduit à un degré de liberté constituent des trajectoires périodiques coplanaires du problème séculaire tridimensionnel.

Les représentations géométriques de ces deux cas sont données à la Figure 6.15 dans le système de coordonnées $(e_1 \cos \Delta\varpi, I_{mut} \cos 2w_1)$. Une première constatation est que notre approche analytique tridimensionnelle reproduit bien tous les équilibres décrits ci-dessus. De même, les équilibres de Kozai introduits à la Section 6.3 sont également présents sur cette vue géométrique. En effet, le bas de l'image, qui correspond à $(w_1, w_2) = (-90^\circ, 90^\circ)$ (à gauche) et à $(90^\circ, 90^\circ)$ (à droite), montre les déformations des courbes d'Hamiltonien constant produites par ces équilibres. La déformation représentée en haut de la figure témoigne, quant à elle, de la présence de l'équilibre central d'excentricités nulles.

Au Chapitre 3, la stabilité des équilibres du problème réduit à un degré de liberté a été déduite directement depuis les représentations sphériques de l'espace de phase. Ces équilibres constituant des trajectoires périodiques coplanaires du problème séculaire tridimensionnel, il nous est à présent possible d'effectuer une étude analytique de leur stabilité en s'attaquant à

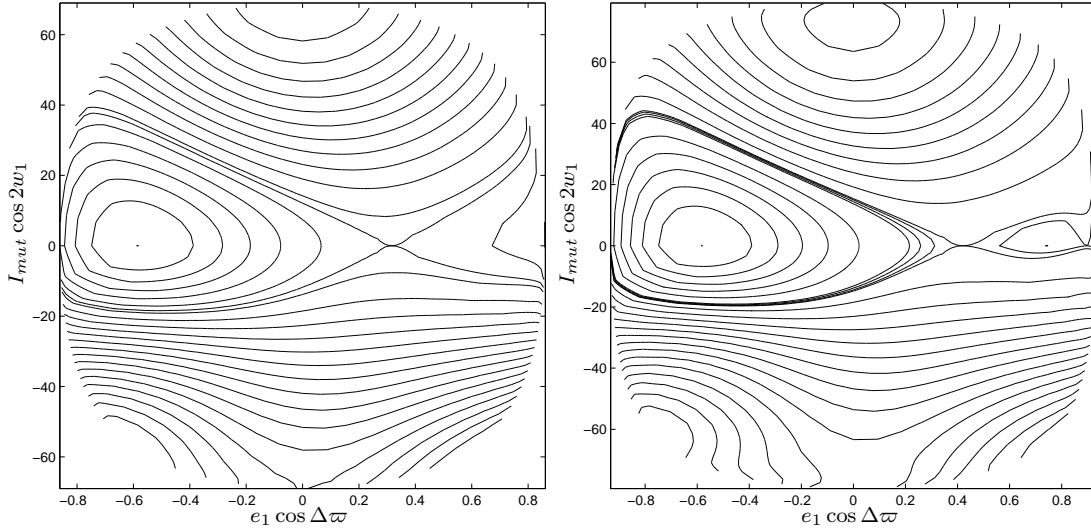


FIG. 6.15: Courbes d'Hamiltonien constant pour les paramètres $\alpha = 0.166$, $m_1/m_2 = 1$ et $\Sigma = 0.1$ (à gauche), 0.13 (à droite) dans le système de coordonnées $(e_1 \cos \Delta\varpi, I_{mut} \cos 2w_1)$. Toutes les trajectoires périodiques des Figures 3.9, 3.10 et 3.11 sont bien reproduites par notre approche tridimensionnelle.

celle des trajectoires périodiques coplanaires du problème tridimensionnel.

En termes des variables canoniques (6.8), les trajectoires périodiques coplanaires s'écrivent

$$\begin{aligned} W_1 &= W_1^* & ; & \quad w_1 = \nu t + u^* + \pi \\ W_2 &= W_2^* & ; & \quad w_2 = \nu t + 2u^*, \end{aligned} \quad (6.33)$$

où W_1^*, W_2^*, u^* sont des constantes. En effet, les équilibres du problème coplanaire réduit à un degré sont tels que les excentricités sont constantes ($W_i = W_i^*$) et tels que la différence angulaire des lignes des apsides, $p_1 - p_2$, est également une constante ($p_1 - p_2 = w_2 - w_1 = u^* - \pi$ valant 0 ou π aux différents équilibres du Chapitre 3), contrairement aux longitudes des péricentres elles-mêmes qui circulent (w_i fonctions du temps). Le Chapitre 3 a montré que l'Hamiltonien (6.21) évalué en $\chi = 0$, c'est-à-dire la partie coplanaire de l'Hamiltonien, dépend seulement des variables W_1, W_2 et de la différence $w_1 - w_2$. Nous le baptisons \mathcal{H}_c dans la suite. Les équations hamiltoniennes associées sont

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 &= -(\partial \mathcal{H}_c / \partial w_1) & ; & \quad \dot{w}_1 = \partial \mathcal{H}_c / \partial W_1 \\ \dot{W}_2 &= -(\partial \mathcal{H}_c / \partial w_2) & ; & \quad \dot{w}_2 = \partial \mathcal{H}_c / \partial W_2. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Afin d'étudier la stabilité de ces trajectoires périodiques coplanaires, nous avons recours aux *équations aux variations*, dont la solution est une mesure de la "sensibilité" de la solution par rapport à de "petites variations" des conditions initiales. Dans notre cadre hamiltonien, ces

équations sont données par

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta w_1 \\ \delta w_2 \\ \delta W_1 \\ \delta W_2 \end{bmatrix} = \mathcal{J} \mathcal{H}_{c_{\vec{x}, \vec{x}}} \begin{bmatrix} \delta w_1 \\ \delta w_2 \\ \delta W_1 \\ \delta W_2 \end{bmatrix}, \quad (6.35)$$

où \mathcal{J} désigne la *matrice symplectique principale* et \vec{x} le vecteur *espace de phase* dont les composantes sont (w_1, w_2, W_1, W_2) . La matrice hessienne de l'Hamiltonien, $\mathcal{H}_{c_{\vec{x}, \vec{x}}}$, se calcule facilement :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta w_1 \\ \delta w_2 \\ \delta W_1 \\ \delta W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial^2 \mathcal{H}_c}{\partial W_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}_c}{\partial W_1 \partial W_2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 \mathcal{H}_c}{\partial W_2 \partial W_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}_c}{\partial W_2^2} \\ -\frac{\partial^2 \mathcal{H}_c}{\partial w_1^2} & -\frac{\partial^2 \mathcal{H}_c}{\partial w_1 \partial w_2} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial^2 \mathcal{H}_c}{\partial w_2 \partial w_1} & -\frac{\partial^2 \mathcal{H}_c}{\partial w_2^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta w_1 \\ \delta w_2 \\ \delta W_1 \\ \delta W_2 \end{bmatrix}. \quad (6.36)$$

Les dérivées partielles doivent être évaluées aux valeurs W_1^* , W_2^* et u^* des trajectoires périodiques coplanaires. Les éléments nuls résultent ainsi de l'évaluation des dérivées $\frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial w_i}$ en $u^* = 0$ ou π . Le fait que, pour les orbites coplanaires, l'Hamiltonien ne dépende que de la différence $w_1 - w_2$ et des moments W_1 et W_2 qui sont constants le long des trajectoires périodiques, implique que :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}_c}{\partial w_1^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}_c}{\partial w_2^2} = -\frac{\partial^2 \mathcal{H}_c}{\partial w_1 \partial w_2} = \alpha = \text{cste}, \quad (6.37)$$

et également que :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}_c}{\partial W_1^2} = A, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}_c}{\partial W_1 \partial W_2} = B, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}_c}{\partial W_2^2} = C, \quad (6.38)$$

avec A , B et C constants.

Ainsi, la *matrice de monodromie*, dont les colonnes sont solutions après une période de (6.36) pour des conditions initiales unitaires, se réécrit

$$\mathcal{M} = \exp \begin{bmatrix} 0 & 0 & AT & BT \\ 0 & 0 & BT & CT \\ -\alpha T & \alpha T & 0 & 0 \\ \alpha T & -\alpha T & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.39)$$

où T est la période de la trajectoire. Enfin, l'équation aux exposants caractéristiques correspondante est donc

$$\lambda^4 + \lambda^2 \alpha (A + C - 2B) T^2 = 0. \quad (6.40)$$

Cette équation possède deux racines nulles (comme pour toute trajectoire périodique d'un système Hamiltonien autonome). Les deux autres racines sont soit réelles, soit imaginaires, suivant le signe de $\alpha(A + C - 2B)$. Lorsque cette quantité est positive, les deux racines sont imaginaires et la trajectoire périodique considérée est stable. Il est intéressant de noter que, si l'on considère la trajectoire périodique comme un équilibre du système à un degré de liberté (v, V) , on obtient

la même équation pour en déterminer la stabilité ($\lambda^2 + \alpha(A + C - 2B)T^2 = 0$).

Lorsque $\Sigma = 0.1$, nous trouvons, en appliquant cette dernière condition, que les trajectoires périodiques coplanaires pour lesquelles $\Delta\varpi = 0^\circ$ ou 180° sont stables. Il en est de même pour toutes les trajectoires périodiques coplanaires situées en $\Delta\varpi = 180^\circ$, comme celle présente lorsque $\Sigma = 0.13$. En ce qui concerne la zone de résonance séculaire non-linéaire existant en $\Delta\varpi = 0^\circ$, nous obtenons, pour $\Sigma = 0.13$, les stabilités suivantes : les équilibres d'excentricités $(0.42, 0.63)$ et $(0.90, 0.26)$ sont des trajectoires périodiques stables tandis que l'équilibre $(0.74, 0.49)$ est instable.

Les mêmes résultats peuvent, bien entendu, être déduits des représentations sphériques de l'espace de phase du problème réduit (Figures 3.9, 3.10 et 3.11 du Chapitre 3). Mais nous tenons à insister sur le fait que les stabilités ne peuvent en aucun cas être connues à partir de la Figure 6.15 car celle-ci n'est ni une surface de section, ni une représentation des trajectoires du système.

Chapitre 7

Comportement séculaire des systèmes extrasolaires tridimensionnels

Dans le cas de systèmes extrasolaires supposés coplanaires, le Chapitre 4 a montré que, grâce à une technique de perturbation par transformées de Lie sur l'Hamiltonien de ce problème à deux degrés de liberté (développé en série des excentricités), nous possédons les expressions analytiques des fréquences du mouvement ainsi que de l'évolution séculaire des orbites. La généralisation de ces résultats à des systèmes extrasolaires tridimensionnels est le but poursuivi dans le présent chapitre.

Pour ce faire, nous utilisons le même développement en excentricités et en inclinaisons que celui de l'approche géométrique menée au chapitre précédent. Aucune réduction de l'Hamiltonien à deux degrés de liberté par l'élimination des noeuds de Jacobi n'est cette fois nécessaire. A l'aide d'une technique de perturbation identique à celle du Chapitre 4, nous obtenons, à la Section 7.1, une formulation angle-action de l'Hamiltonien, menant aux expressions analytiques des quatre fréquences fondamentales du problème tridimensionnel séculaire. Cela permet également de connaître les expressions analytiques des évolutions séculaires des différents éléments orbitaux. Nous insistons sur le fait, qu'une fois encore, notre approche est totalement analytique.

La Section 7.2 applique cette étude à un système planétaire fictif considéré dans deux référentiels différents : un référentiel général et un référentiel lié au plan de Laplace, et compare les différences d'évolution des éléments orbitaux qui découlent de ce choix de repère. Entre autres, nous identifions, par analyse en fréquence, les principales combinaisons des fréquences fondamentales influençant ces évolutions à long terme.

La sensibilité d'un système tridimensionnel à ses différents éléments orbitaux osculateurs est l'objet de la Section 7.3 et, plus particulièrement, l'étude des effets induits sur les fréquences fondamentales et sur le comportement des angles.

Enfin, la Section 7.4 s'intéresse à l'exosystème ν Andromède et cherche à savoir si les évolutions des excentricités et de la différence angulaire des lignes des apsides observées dans

le cas coplanaire sont maintenues pour des valeurs croissantes de l'inclinaison mutuelle des deux plans orbitaux de ce système.

7.1 Fréquences fondamentales du problème tridimensionnel des trois corps

7.1.1 Formulation angle-action du problème de Laplace-Lagrange

Limitons-nous, dans un premier temps, à l'étude des termes quadratiques en $\sqrt{P_i}$ et $\sqrt{Q_i}$ de l'Hamiltonien (6.6) du problème tridimensionnel des trois corps moyenné par rapport aux variables rapides. Ces termes peuvent se formuler :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0 &= -\frac{Gm_1m_2}{a_2} \left(2\delta \left[\frac{P_1}{L_1} + \frac{P_2}{L_2} - \frac{Q_1}{L_1} - \frac{Q_2}{L_2} + 2\sqrt{\frac{Q_1Q_2}{L_1L_2}} \cos(q_1 - q_2) \right] + 2\gamma \sqrt{\frac{P_1P_2}{L_1L_2}} \cos(p_1 - p_2) \right) \\ &= -\frac{Gm_1m_2}{a_2} \left(aP_1 + bP_2 + c\sqrt{4P_1P_2} \cos(p_1 - p_2) + \tilde{a}Q_1 + \tilde{b}Q_2 \right. \\ &\quad \left. + \tilde{c}\sqrt{4Q_1Q_2} \cos(q_1 - q_2) \right) \end{aligned} \quad (7.1)$$

où $\delta = C_{1,0,0,0}^{0,0,0} > 0$ et $\gamma = C_{0,0,0,0}^{1,-1,-1} < 0$. Les coefficients présents dans cette expression dépendent uniquement du rapport des demi-grands axes. Un exemple d'une telle série est donnée à la Table 2.2 (où l'on a considéré $a_1/a_2 = 0.2$). Nous remarquons que les moments P_i et Q_i n'apparaissent jamais simultanément dans un même terme de l'Hamiltonien quadratique du problème de Laplace-Lagrange. De même, les deux sommes de moments $P_1 + P_2$ et $Q_1 + Q_2$ sont constantes. Ces propriétés ne sont plus vérifiées aux ordres supérieurs. Comme nous l'avons montré au chapitre précédent, seul le déficit de moment angulaire $P_1 + P_2 + Q_1 + Q_2$ est une intégrale première du problème non-linéaire.

Nous cherchons à munir l'Hamiltonien (7.1) de coordonnées angle-action afin d'obtenir une expression des quatre fréquences linéaires du système. A l'instar du Chapitre 3, nous pouvons dissocier les quatre degrés de liberté de cette formulation (associés deux à deux) en l'exprimant dans les coordonnées cartésiennes $Y_i = \sqrt{2P_i} \sin p_i$, $X_i = \sqrt{2P_i} \cos p_i$, $Z_i = \sqrt{2Q_i} \sin q_i$ et $W_i = \sqrt{2Q_i} \cos q_i$, et en appliquant deux transformations de découplage similaires :

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y'_1 \cos \beta_p + Y'_2 \sin \beta_p & X_1 &= X'_1 \cos \beta_p + X'_2 \sin \beta_p \\ Y_2 &= -Y'_1 \sin \beta_p + Y'_2 \cos \beta_p & X_2 &= -X'_1 \sin \beta_p + X'_2 \cos \beta_p \\ Z_1 &= Z'_1 \cos \beta_q + Z'_2 \sin \beta_q & W_1 &= W'_1 \cos \beta_q + W'_2 \sin \beta_q \\ Z_2 &= -Z'_1 \sin \beta_q + Z'_2 \cos \beta_q & W_2 &= -W'_1 \sin \beta_q + W'_2 \cos \beta_q, \end{aligned} \quad (7.2)$$

où les angles des rotations valent

$$\tan 2\beta_p = \frac{\gamma\sqrt{L_1L_2}}{\delta(L_1 - L_2)} \quad \text{et} \quad \tan 2\beta_q = -\frac{2\sqrt{L_1L_2}}{L_1 - L_2}.$$

Un retour aux coordonnées polaires $Y'_i = \sqrt{2P'_i} \sin p'_i$, $X'_i = \sqrt{2P'_i} \cos p'_i$, $Z'_i = \sqrt{2Q'_i} \sin q'_i$ et $W'_i = \sqrt{2Q'_i} \cos q'_i$ introduit des variables angle-action dans l'Hamiltonien quadratique qui

devient

$$\mathcal{K}'_0 = -\frac{n_2(m_1 + m_2)}{m_0} [\nu_1 P'_1 + \nu_2 P'_2 + \nu_3 Q'_1 + \nu_4 Q'_2], \quad (7.3)$$

avec $n_2 = \sqrt{Gm_0/a_2^3}$ le moyen mouvement képlérien de m_2 . Il est à noter que les transformations de découplage (7.2) laissent inchangées les deux sommes de moments : $P_1 + P_2 = P'_1 + P'_2$ et $Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2$. Les moments P'_i, Q'_i sont constants et les fréquences ν_i dépendent du rapport des demi-grands axes α (à travers les coefficients γ et δ) et de celui des masses μ selon les relations :

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \mu[\delta(L_1 + L_2) + \sqrt{\delta^2(L_1 - L_2)^2 + \gamma^2 L_1 L_2}] / L_1 \\ \nu_2 &= \mu[\delta(L_1 + L_2) - \sqrt{\delta^2(L_1 - L_2)^2 + \gamma^2 L_1 L_2}] / L_1 \\ \nu_3 &= -2\mu\delta(L_1 + L_2) / L_1 \\ \nu_4 &= 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Nous constatons que la dernière fréquence est nulle, tout comme la somme des autres fréquences $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3$. Ces relations entre fréquences linéaires sont bien connues en mécanique céleste (cfr e.g. [Malige et al., 2002]). Le fait que la somme des fréquences linéaires du problème séculaire soit nulle a été démontré par [Abdullah et Albouy, 2001] (résonance de Herman).

7.1.2 Formulation angle-action du problème non-linéaire

Dans les variables angle-action du problème de Laplace-Lagrange, l'Hamiltonien (6.6) tronqué à l'ordre 12 en excentricités et inclinaisons se formule

$$\mathcal{K}' = \mathcal{K}'_0 - \frac{Gm_1 m_2}{a_2} \sum_{k,j_1,j_2,i_l,l \in \mathbb{Z}} B'_{i_l}{}^{k,j_1,j_2} E_1'^{|j_1|+2i_1} E_2'^{|j_2|+2i_2} S_1'^{|k+j_1|+2i_3} S_2'^{|k+j_2|+2i_4} \cos \Phi', \quad (7.5)$$

avec $\Phi' = [j_1 p'_1 - j_2 p'_2 - (k + j_1) q'_1 + (k + j_2) q'_2]$. Les quantités E'_i, S'_i sont liées aux moments P'_i, Q'_i par la même relation que les quantités E_i, S_i aux moments P_i, Q_i . Comme nous l'avons explicité à la Section 4.1, la propriété de somme nulle des coefficients des variables angulaires est préservée par les transformations de découplage. De plus, comme souligné à la Section 7.1.1, les relations (7.2) peuvent être combinées pour montrer que la somme des moments est inchangée par ces rotations : $P_1 + P_2 + Q_1 + Q_2 = P'_1 + P'_2 + Q'_1 + Q'_2$.

Dans l'optique de développer une théorie séculaire non-linéaire, nous utilisons la théorie des perturbations basée sur les transformations de Lie ([Hori, 1966], [Deprit, 1969]) explicitée en détail à la Section 4.1 dans le cas du problème coplanaire à deux degrés de liberté et dont nous reproduisons, dans les lignes suivantes, l'idée principale. L'objectif est de moyenner l'Hamiltonien (7.5) du problème séculaire des trois corps par rapport aux variables angulaires p'_i et q'_i , et d'introduire ainsi une formulation angle-action du problème non-linéaire. A chaque ordre, nous résolvons l'équation homologique (dans les notations du Chapitre 4)

$$\tilde{H}_0^{(k)} - H_0^{(k)} = -\frac{n_2(m_1 + m_2)}{m_0} \left[\nu_1 \frac{\partial \mathcal{W}_k}{\partial p'_1} + \nu_2 \frac{\partial \mathcal{W}_k}{\partial p'_2} + \nu_3 \frac{\partial \mathcal{W}_k}{\partial q'_1} + \nu_4 \frac{\partial \mathcal{W}_k}{\partial q'_2} \right] \quad (7.6)$$

de sorte à ce que tous les termes de l'Hamiltonien soient ainsi intégrés pour former le générateur de la transformation à l'exception de ceux qui créent des problèmes de "petits dénominateur", c'est-à-dire ceux contenant une combinaison angulaire dont la fréquence au premier

ordre est nulle. Ces derniers forment quant à eux l'Hamiltonien moyenné. Comme la somme des fréquences linéaires $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ et la fréquence ν_4 sont toutes deux égales à zéro, l'Hamiltonien moyenné ne contient pas seulement les termes sans variable angulaire mais également les termes du type $\cos k(p'_1 + p'_2 + q'_1 - 3q'_2)$. En effet, il s'agit de la seule combinaison de variables angulaires de fréquence linéaire nulle et qui respecte la caractéristique des coefficients de somme nulle. Ces derniers termes peuvent en principe être présents à partir de l'ordre six en excentricités et inclinaisons en raison de la caractéristique de d'Alembert, mais, concrètement, ils apparaissent seulement aux ordres 10 et 12 avec $k = 1$. Ainsi l'Hamiltonien moyenné est de la forme (dans la suite, nous omettons le facteur $-Gm_1m_2/a_2$) :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{K}}' = & \sum_{l_1+l_2+l_3 \leq 6} C_{l_1, l_2, l_3} \bar{E}_1'^{2l_1} \bar{E}_2'^{2l_2} \bar{S}_1'^{2l_3} \\ & + \sum_{m_1+m_2+m_3+m_4 \geq 10} D_{m_1} \bar{E}_1'^{m_1} \bar{E}_2'^{m_2} \bar{S}_1'^{m_3} \bar{S}_2'^{m_4} \cos(\bar{p}'_1 + \bar{p}'_2 + \bar{q}'_1 - 3\bar{q}'_2). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Nous remarquons que la première somme de cette expression ne dépend pas de la variable \bar{Q}'_2 , tout comme c'est le cas pour l'Hamiltonien du problème de Laplace-Lagrange (7.3). Nous n'avons pas d'explication formelle de la *symétrie cachée* de l'Hamiltonien à l'origine d'une telle disparition mais l'absence de \bar{Q}'_2 est manifeste dans les résultats de notre moyennisation. Les constantes \bar{E}'_i et \bar{S}'_i représentent les valeurs moyennées par rapport au mouvement séculaire. Ces dernières peuvent être calculées, sur base des valeurs des éléments orbitaux osculateurs, par l'algorithme de Lie inverse explicité à la Section 4.2.

Pour obtenir une formulation angle-action de l'Hamiltonien séculaire, il est encore nécessaire de le moyenné par rapport à la combinaison de variables angulaires restante. Pour ce faire, nous effectuons d'abord une transformation canonique des variables afin de réduire l'Hamiltonien (7.7) au seul degré de liberté correspondant à cette combinaison angulaire :

$$\begin{aligned} u_1 &= \bar{p}'_1 - \bar{q}'_1 & U_1 &= (\bar{P}'_1 - \bar{Q}'_1)/2 \\ u_2 &= \bar{p}'_2 - \bar{q}'_2 & U_2 &= (\bar{P}'_2 - (\bar{P}'_1 + \bar{Q}'_1))/2 \\ v_1 &= \bar{p}'_1 + \bar{p}'_2 + \bar{q}'_1 - 3\bar{q}'_2 & V_1 &= (\bar{P}'_1 + \bar{Q}'_1)/2 \\ v_2 &= \bar{q}'_2 & V_2 &= \bar{P}'_1 + \bar{P}'_2 + \bar{Q}'_1 + \bar{Q}'_2. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Seul l'angle v_1 est présent dans cette nouvelle formulation de l'Hamiltonien, ce qui signifie que les moments U_1 , U_2 et V_2 sont des intégrales premières et que le problème est réduit à un problème à un degré de liberté (v_1, V_1) . La partie quadratique de l'Hamiltonien moyenné exprimé dans les variables (7.8),

$$\bar{\mathcal{K}}'_0 = (\nu_1 - \nu_3)U_1 + \nu_2U_2, \quad (7.9)$$

est constante et indépendante du moment V_1 . C'est pourquoi le noyau de l'élimination de v_1 est composé des termes de l'Hamiltonien (7.7) de degré quatre en excentricités et inclinaisons qui, eux, contiennent V_1 , à savoir

$$\mathcal{F}_0^{(0)} = a_1V_1^2 + a_2V_1U_1 + a_3V_1U_2. \quad (7.10)$$

Appelons \mathcal{N} la dérivée de cette dernière expression par rapport à V_1

$$\mathcal{N} = 2a_1V_1 + a_2U_1 + a_3U_2. \quad (7.11)$$

Tous les coefficients a_i étant négatifs, seul le cas $V_1 = U_1 = U_2 = 0$ entraîne l'annulation de cette dernière quantité. L'équation homologique définissant le générateur \mathcal{V}_1 de la transformation éliminant l'angle v_1 de l'Hamiltonien séculaire moyenné $\bar{\mathcal{K}}' = \mathcal{F}_0^{(0)} + \mathcal{F}_1^{(0)}$ est

$$\mathcal{N} \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial v_1} = \mathcal{F}_1^{(0)} - \mathcal{F}_0^{(1)}. \quad (7.12)$$

Une élimination du premier ordre est suffisante puisque la petite quantité $\mathcal{F}_1^{(0)}/\mathcal{N}$ est elle-même d'ordre 8 dans le triangle de Lie (i.e. d'ordre 10 en excentricités et inclinaisons). Cette moyennisation produit la formulation en variables angle-action de l'Hamiltonien non-linéaire escomptée :

$$\bar{\mathcal{K}}' = \sum_{l_1+l_2+l_3 \leq 6} C_{l_1, l_2, l_3} \bar{E}_1'^{2l_1} \bar{E}_2'^{2l_2} \bar{S}_1'^{2l_3}. \quad (7.13)$$

Ces deux moyennisations consécutives laissent inchangée la somme des moments ($\bar{P}_1' + \bar{P}_2' + \bar{Q}_1' + \bar{Q}_2' = \bar{P}_1' + \bar{P}_2' + \bar{Q}_1' + \bar{Q}_2' = P_1' + P_2' + Q_1' + Q_2'$). En effet, les sommes des coefficients des variables angulaires p_1', p_2', q_1', q_2' et $\bar{p}_1', \bar{p}_2', \bar{q}_1', \bar{q}_2'$ des fonctions sinusoïdales des deux générateurs sont nulles. Cela implique que la parenthèse de Poisson permettant l'évaluation de la somme des moments moyennés s'annule également.

En outre, bien que nécessaire théoriquement, cette seconde moyennisation est pratiquement insignifiante. En effet, tous les termes de la seconde partie de l'Hamiltonien (7.7) ont, pour facteur, \bar{S}_2' qui, comme nous l'illustrerons à la Section 7.2.2, s'annule dans le référentiel lié au plan de Laplace. Cela signifie notamment que les corrections apportées par cette seconde moyennisation sont très petites, voire nulles (comme c'est le cas dans le système de référence du plan de Laplace). Par conséquent, les quantités \bar{E}_i' et \bar{S}_i' constituent une bonne approximation des constantes \bar{E}_1' et \bar{S}_1' . Dans la suite, nous travaillerons ainsi avec ces valeurs approchées.

De plus, nous adoptons dès à présent la notation simplifiée ($\bar{}$) pour référer à l'Hamiltonien doublement moyenné. Dans ces nouvelles notations, les équations du mouvement associées à l'Hamiltonien $\bar{\mathcal{K}}'$ (7.13) sont les suivantes :

$$\dot{\bar{p}}_i' = \frac{\partial \bar{\mathcal{K}}'}{\partial \bar{P}_i'} \quad \text{et} \quad \dot{\bar{q}}_i' = \frac{\partial \bar{\mathcal{K}}'}{\partial \bar{Q}_i'}. \quad (7.14)$$

Elles mènent à l'expression des quatre fréquences du problème, que nous nommons *fréquences fondamentales* :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{p}}_1' &= -\frac{(1-\mu)}{\sqrt{\alpha}} \sum_{l_i, i \in \mathbb{Z}} 2l_1 C_{l_1, l_2, l_3} \bar{E}_1'^{2(l_1-1)} \bar{E}_2'^{2l_2} \bar{S}_1'^{2l_3} \\ \dot{\bar{p}}_2' &= -\mu \sum_{l_i, i \in \mathbb{Z}} 2l_2 C_{l_1, l_2, l_3} \bar{E}_1'^{2l_1} \bar{E}_2'^{2(l_2-1)} \bar{S}_1'^{2l_3} \\ \dot{\bar{q}}_1' &= -\frac{(1-\mu)}{\sqrt{\alpha}} \sum_{l_i, i \in \mathbb{Z}} 2l_3 C_{l_1, l_2, l_3} \bar{E}_1'^{2l_1} \bar{E}_2'^{2l_2} \bar{S}_1'^{2(l_3-1)} \\ \dot{\bar{q}}_2' &= 0. \end{aligned} \quad (7.15)$$

L'existence d'une fréquence nulle pour le problème séculaire est une conséquence de l'invariance de la direction du moment angulaire total ([Malige et al., 2002]). L'unité de fréquence de l'Eq. (7.15) est, conformément à l'étude du cas coplanaire, la fréquence képlérienne $n_2 = \sqrt{Gm_0/a_2^3}$ de la masse m_2 multipliée par le rapport de masses $(m_1 + m_2) / m_0$. Les périodes associées à ces fréquences sont inversement proportionnelles aux valeurs des masses réelles des planètes. Concernant les systèmes extrasolaires dont la détection par vitesses radiales fournit seulement des masses minimales pour les différentes planètes, les équations (7.15) sont alors associées aux valeurs maximales possibles des périodes.

Finalement, l'algorithme de Lie peut également être utilisé afin d'exprimer les excentricités e_i , les inclinaisons i_i , les arguments des péricentres $\omega_i = -(p_i - q_i)$, la différence des longitudes des péricentres $\Delta\varpi = \varpi_1 - \varpi_2 = p_2 - p_1$ et la différence des longitudes des noeuds $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2 = q_2 - q_1$ sous forme de fonctions temporelles des éléments moyens (cfr Section 4.1). Comme dans le cas coplanaire, aucune intégration numérique n'est pour cela nécessaire et notre approche tridimensionnelle est, une fois encore, totalement analytique.

7.2 Comparaison des évolutions séculaires dans deux référentiels différents

Les études portant sur le problème des trois corps tridimensionnel sont généralement développées dans le *référentiel lié au plan de Laplace* (e.g. celle de [Michtchenko et al., 2006b] ou celle menée au Chapitre 6). Ce choix est basé, comme nous l'avons vu, sur l'invariance du moment angulaire total en norme et en direction, et permet de réduire la fonction hamiltonienne séculaire à une fonction de deux degrés de liberté seulement. Dans cette section, nous appliquons notre modèle totalement analytique à un système fictif considéré dans deux référentiels différents, un *référentiel général* et celui lié au plan de Laplace, et discutons des différences dans la représentation de l'évolution séculaire du système induites par ce choix.

Concrètement, nous considérons le système défini par les masses $m_0 = 1M_\odot$, $m_1 = 2M_J$ et $m_2 = 4M_J$, les demi-grands axes $a_1 = 0.5$ UA et $a_2 = 2.5$ UA et les excentricités $e_1 = 0.1$ et $e_2 = 0.2$. En outre, dans le référentiel général de la Section 7.2.1, nous considérons les valeurs arbitraires des éléments orbitaux osculateurs suivantes : $i_1 = 21.739^\circ$, $i_2 = 3.369^\circ$, $\omega_1 = 270^\circ$, $\omega_2 = 90^\circ$, $\Omega_1 = 0^\circ$ et $\Omega_2 = 0^\circ$. Ce système fictif est représenté à la Figure 7.1 (schéma de gauche).

7.2.1 Référentiel général

En premier lieu, il est important de vérifier la convergence numérique des développements (6.6) et (7.13) appliqués à ce système planétaire fictif. Les contributions d'ordre 2 à 12 en E_i et S_i (ou en \bar{E}_i et \bar{S}_i) sont reportées à la Table 7.1. La convergence numérique de l'Hamiltonien \mathcal{K} est excellente tandis que celle de l'Hamiltonien moyenné $\bar{\mathcal{K}}$ est plus faible mais, comme nous le verrons, est suffisante pour représenter assez précisément les orbites (contributions d'ordre

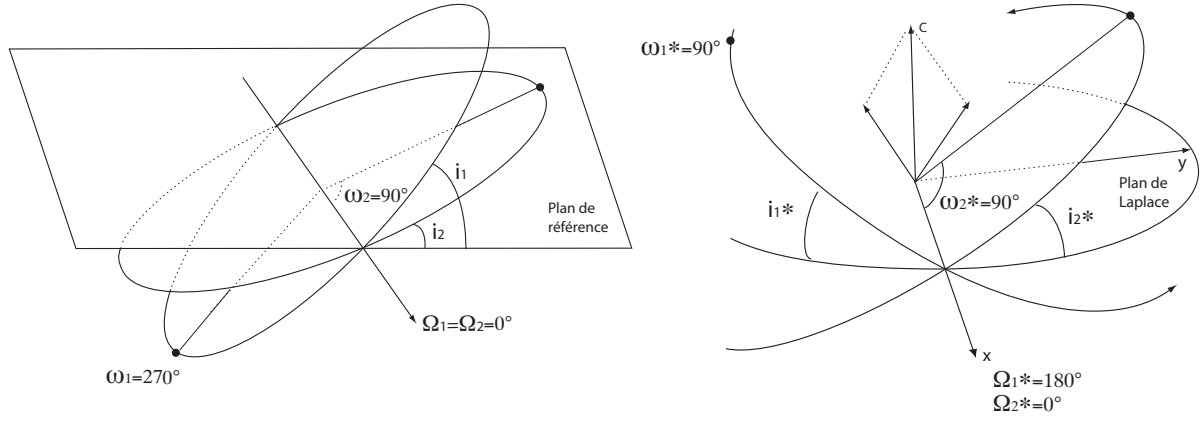


FIG. 7.1: Même système planétaire fictif représenté dans deux référentiels différents : un référentiel général (à gauche) étudié à la Section 7.2.1 et un référentiel lié au plan de Laplace (à droite) étudié à la Section 7.2.2

TAB. 7.1: Convergence numérique des Hamiltoniens \mathcal{K} (6.6) et $\bar{\mathcal{K}}'$ (7.13) pour le système fictif repéré dans le référentiel général de la Section 7.2.1. Les trois dernières colonnes montrent les valeurs des périodes fondamentales obtenues par troncature à différents ordres.

Ordre	\mathcal{K}	$\bar{\mathcal{K}}'$	$T_{\bar{p}'_1}$ (ans)	$T_{\bar{p}'_2}$ (ans)	$T_{\bar{q}'_1}$ (ans)
2	-6.6×10^{-4}	-7.9×10^{-3}	14 046.32	69 313.98	11 679.50
4	-1.7×10^{-4}	-2.0×10^{-3}	17 213.12	74 653.89	11 269.42
6	-6.7×10^{-6}	-6.6×10^{-4}	17 467.37	75 526.56	11 226.50
8	2.7×10^{-7}	-2.9×10^{-4}	17 460.73	75 577.26	11 220.90
10	3.9×10^{-8}	3.6×10^{-5}	17 456.92	75 577.72	11 220.51
12	1.0×10^{-9}	2.1×10^{-4}	17 456.48	75 577.55	11 220.55

12 valant respectivement 10^{-9} et 10^{-4}).

A l'aide de l'algorithme de Lie inverse, nous sommes en mesure de calculer les valeurs des éléments moyens : $\bar{e}'_1 = 0.152$, $\bar{e}'_2 = 0.191$, $\bar{i}'_1 = 16.86^\circ$ et $\bar{i}'_2 = 7.43^\circ$. Ces dernières quantités sont liées aux moments \bar{E}'_i , \bar{S}'_i par la même relation que les éléments e_i , i_i aux moments E_i , S_i . Les fréquences fondamentales non-nulles du problème valent (dans l'unité de fréquence de l'équation (7.15)) $\dot{\bar{p}}'_1 = -3.953 \times 10^{-2}$, $\dot{\bar{p}}'_2 = -9.130 \times 10^{-3}$ et $\dot{\bar{q}}'_1 = 6.149 \times 10^{-2}$; elles correspondent à des périodes de $T_{\bar{p}'_1} = 17\,456$ ans, $T_{\bar{p}'_2} = 75\,578$ ans et $T_{\bar{q}'_1} = 11\,221$ ans. Il est à noter que ces valeurs sont assez différentes de celles de la théorie linéaire de Laplace-Lagrange : $T_{\bar{p}'_1} = 14\,046$ ans, $T_{\bar{p}'_2} = 69\,314$ ans et $T_{\bar{q}'_1} = 11\,679$ ans, soit une différence de presque 20% pour la première période. Une fois encore, ces différents résultats illustrent les limitations bien connues de la théorie de Laplace-Lagrange quant à la prédiction du mouvement séculaire des systèmes extrasolaires et sont dans la continuité de celles mises en évidence dans le cas coplanaire (cfr Section 4.4). Pour mieux illustrer l'écart entre les résultats d'ordre 2 et

12, sont regroupées, à la Table 7.1, les valeurs des trois périodes fondamentales (non-nulles) calculées aux différents ordres intermédiaires en excentricités et inclinaisons. La convergence numérique des résultats est évidente et appuie notre choix de limiter le développement à l'ordre 12. Toutefois, en cas de bonne convergence numérique, l'approximation limitée à l'ordre 8 ou 10 est déjà tout à fait satisfaisante (précision de l'ordre de l'année).

Les variations à long terme des excentricités e_i , des inclinaisons i_i , des arguments des péri-centres ω_i , de la différence des longitudes des péri-centres $\Delta\varpi$ et de la différence des longitudes des noeuds $\Delta\Omega$ font l'objet de la Figure 7.2. Le comportement séculaire de chaque élément est influencé par différentes combinaisons des fréquences fondamentales. Notre théorie analytique nous permet de mettre en évidence les différentes combinaisons agissant sur les variables (E'_i, S'_i, p'_i, q'_i) mais la transformation de découplage rend l'entreprise sur les variables initiales (E_i, S_i, p_i, q_i) plus compliquée. Afin d'éviter des transformations analytiques fastidieuses, nous avons recours à l'analyse en fréquence (sur les données obtenues analytiquement et permettant la reproduction des évolutions temporelles de la Figure 7.2), dont l'algorithme utilisé est celui de [Champenois, 1998]. Cet algorithme est basé sur le travail original de [Laskar, 1993]. Pour plus de détails nous référons à [Lainey et al., 2006].

Comme suggéré par la Figure 7.2, les excentricités e_1 et e_2 sont influencées par les mêmes combinaisons de fréquences fondamentales. Il en est de même pour les inclinaisons i_1 et i_2 . L'analyse en fréquence nous permet d'approximer les inclinaisons (exprimées en radians) par les fonctions trigonométriques suivantes :

$$\begin{aligned} i_1 &\approx 0.2789 + 0.1147 \cos(0.00055997 t) - 0.01204 \cos(0.0011199 t) \\ &\quad - 0.004413 \cos(0.0018398 t) + 0.002619 \cos(0.0016799 t) \\ i_2 &\approx 0.1251 - 0.05719 \cos(0.00055997 t) - 0.006908 \cos(0.0011199 t) \\ &\quad - 0.000259 \cos(0.0018398 t) - 0.001719 \cos(0.0016799 t), \end{aligned} \quad (7.16)$$

où les fréquences sont cette fois exprimées en radians par an. Dans ce travail, nous limitons l'approximation aux quatre termes trigonométriques de plus grande amplitude. Il s'agit déjà d'une très bonne approximation, l'erreur maximale étant inférieure à 0.5° pour l'inclinaison de la planète intérieure et inférieure à 0.2° pour l'inclinaison de l'autre planète. Les fréquences ainsi détectées peuvent être identifiées en tant que combinaisons entières des fréquences fondamentales, à savoir respectivement $\dot{q}'_1 - \dot{q}'_2$, $2\dot{q}'_1 - 2\dot{q}'_2$, $-2\dot{p}'_1 + 2\dot{q}'_1$ et $3\dot{q}'_1 - 3\dot{q}'_2$. Des approximations trigonométriques similaires peuvent être calculées pour les excentricités.

Concernant les angles de la Figure 7.2, nous voyons qu'ils circulent tous avec des taux de précession qui peuvent être déduits par analyse en fréquence. Ensuite, cette contribution linéaire étant retirée de la courbe, l'oscillation résultante peut à son tour être analysée. Par exemple, nous trouvons l'approximation de $\Delta\Omega$ (exprimé en radians) suivante :

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &\approx -0.00055997 t - 0.2228 \sin(0.0011199 t) \\ &\quad - 0.07188 \sin(0.00055997 t) - 0.02524 \sin(0.0022399 t) \\ &\quad - 0.02032 \sin(0.0018399 t). \end{aligned} \quad (7.17)$$

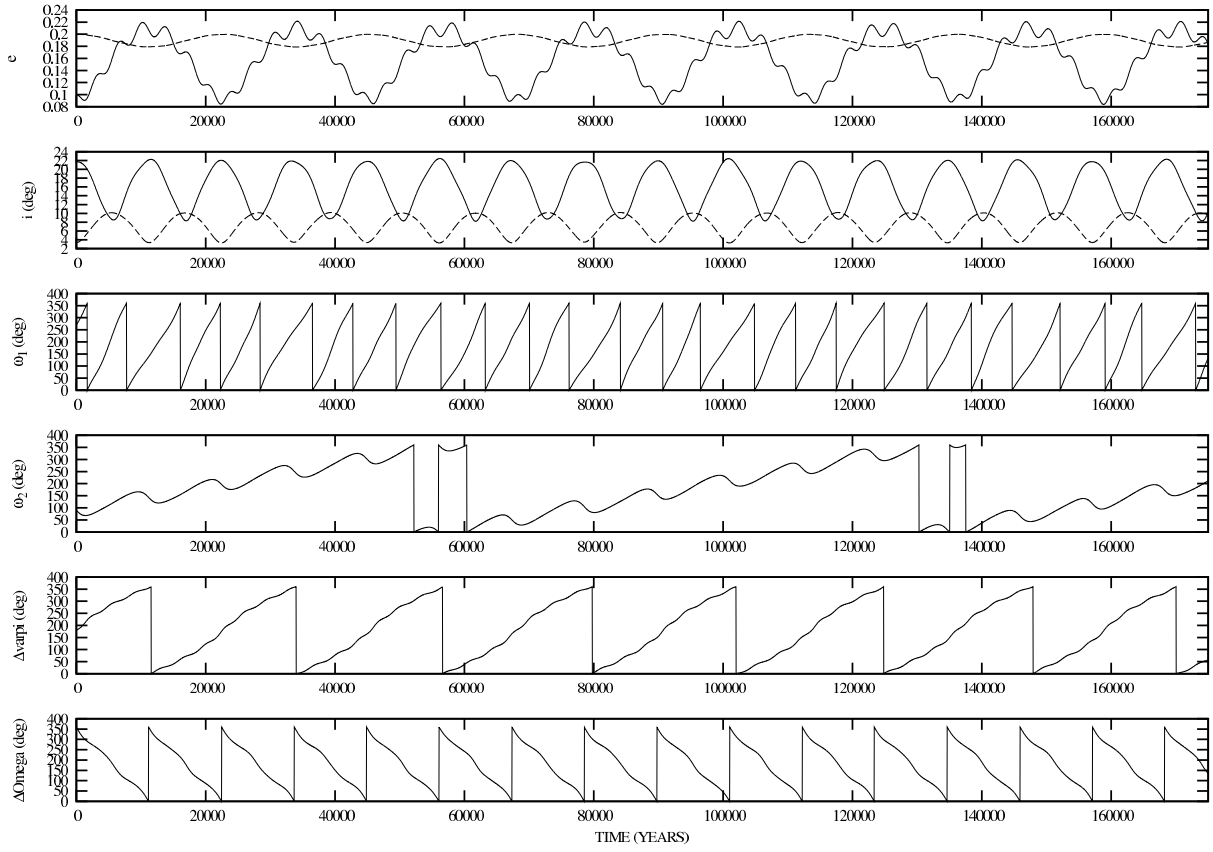


FIG. 7.2: Variations temporelles, sur 1.75×10^5 ans, du système fictif de la Section 7.2.1 : *de haut en bas*, les excentricités e_i , les inclinaisons i_i , les arguments des péricentres ω_1 et ω_2 , la différence des longitudes des péricentres $\Delta\varpi$ et la différence des longitudes des noeuds $\Delta\Omega$. Dans les deux graphes supérieurs, les lignes en pointillés représentent le corps extérieur m_2 .

TAB. 7.2: Résultats principaux quant au comportement séculaire du système de la Section 7.2.1, obtenus par décomposition en fréquences des éléments reproduits à la Figure 7.2. Les périodes sont exprimées en années.

Périodes	e	i	ω_1	ω_2	$\Delta\varpi$	$\Delta\Omega$	$2\omega_1$	Identification
22 699	c_1		c_2	c_4	\mathbf{c}_1, c_2		c_2	$-\dot{p}'_1 + \dot{p}'_2$
3 415	c_2	c_3			c_4	c_5	\mathbf{c}_1, c_5	$-2\dot{p}'_1 + 2\dot{q}'_1$
11 350	c_3		c_5		c_3			$-2\dot{p}'_1 + 2\dot{p}'_2$
4 020	c_4							$-\dot{p}'_1 - \dot{p}'_2 + 2\dot{q}'_1$
2 969					c_5			$-3\dot{p}'_1 + \dot{p}'_2 + 2\dot{q}'_1$
6 830			\mathbf{c}_1					$-\dot{p}'_1 + \dot{q}'_1$
75 578				\mathbf{c}_1				$-\dot{p}'_2 + \dot{q}'_2$
11 221		c_1	c_3	c_2		$-\mathbf{c}_1, c_3$	c_3	$\dot{q}'_1 - \dot{q}'_2$
5 610		c_2	c_4	c_3		c_2	c_4	$2\dot{q}'_1 - 2\dot{q}'_2$
3 740		c_4		c_5				$3\dot{q}'_1 - 3\dot{q}'_2$
2 805						c_4		$4\dot{q}'_1 - 4\dot{q}'_2$

A cet ordre de troncature, l'erreur maximale est inférieure à 3.5° . Le taux de précession de $\Delta\Omega$ correspond à la combinaison des fréquences fondamentales $-\dot{q}'_1 + \dot{q}'_2$ et les fréquences apparaissant dans l'expression (7.17) sont également facilement identifiables : $2\dot{q}'_1 - 2\dot{q}'_2$, $\dot{q}'_1 - \dot{q}'_2$, $4\dot{q}'_1 - 4\dot{q}'_2$ et $-2\dot{p}'_1 + 2\dot{q}'_1$ respectivement.

La Table 7.2 fait la synthèse des principales fréquences qui dominant le comportement à long terme de chacun des graphes de la Figure 7.2. Elles sont présentées par amplitude décroissante du terme trigonométrique et notées de c_1 (amplitude la plus élevée) à c_5 . La notation c_1 indique, quant à elle, le taux de précession d'une variable angulaire qui circule. La dernière colonne reprend l'identification des différentes combinaisons des fréquences fondamentales qui respectent toutes la symétrie résultant de l'invariance par rotation du système. Nous remarquons que la décomposition en fréquences des excentricités e_i est fortement liée à celle de l'angle $\Delta\varpi$. Entre autres, la fréquence principale des excentricités correspond au taux de précession de la différence des longitudes des péricentres. Cela explique que, abstraction faite des courtes périodes, les excentricités extrémales sont atteintes lorsque $\sin(\Delta\varpi) = 0$. La même relation entre les décompositions des inclinaisons i_i et de la différence des longitudes des noeuds $\Delta\Omega$ est observable également.

7.2.2 Référentiel lié au plan de Laplace

Poursuivons l'étude du même système planétaire fictif mais considéré cette fois dans un système de référence lié au plan de Laplace. Il s'agit du plan de référence généralement utilisé dans les études du problème tridimensionnel, vu le nombre important de degrés de liberté à prendre en compte. En effet, son adoption permet de réduire l'Hamiltonien du problème de deux degrés de liberté, et donc par là-même l'espace des paramètres orbitaux à prendre en considération. Nous renvoyons au Chapitre 6 pour plus de détails quant à l'élimination des noeuds de Jacobi permettant cette réduction. Rappelons seulement que le déficit de moment angulaire (cfr Eq. (6.14)) est précisément la somme des moments $P_1 + P_2 + Q_1 + Q_2$ qui, selon la Section 7.1.2, est invariante lors des transformations de découplage et de la moyennisation.

Le même système fictif repéré dans un référentiel lié au plan de Laplace est représenté à la Figure 7.1 (schéma de droite). Connaissant la norme du moment angulaire total, les valeurs des inclinaisons des plans orbitaux dans ce nouveau repère peuvent être obtenues par la résolution du système formé par les équations (6.11), (6.12) et (6.13) : $i_1^* = 15.0006^\circ$ et $i_2^* = 3.3694^\circ$. La notation (*) indique que les éléments orbitaux osculateurs sont à considérer dans le référentiel lié au plan de Laplace. De plus, par l'équation (6.11), nous devons avoir que la différence des longitudes des noeuds est fixée à 180° , soit, par exemple, $\Omega_1^* = 180^\circ$ et $\Omega_2^* = 0^\circ$. Comme attendu, l'inclinaison mutuelle des orbites reste identique dans les deux référentiels, à savoir $i_1^* + i_2^* = i_1 - i_2$ (cfr Eq. (7.18) pour le calcul de l'inclinaison mutuelle). De même, il reste à ajuster les valeurs ω_i^* de sorte à positionner les péricentres à même distance dans les deux repères. Finalement, dans ce nouveau référentiel, les différents éléments orbitaux du même système que celui de la Section 7.2.1 sont $i_1^* = 15.0006^\circ$, $i_2^* = 3.3694^\circ$, $\omega_1^* = 90^\circ$, $\omega_2^* = 90^\circ$, $\Omega_1^* = 180^\circ$ et $\Omega_2^* = 0^\circ$. Pour plus de facilité dans les notations, nous omettons dès à présent

le symbole (*), tous les éléments discutés dans la suite étant issus du référentiel lié au plan de Laplace.

La convergence numérique de l'Hamiltonien \mathcal{K} (6.6) appliqué en ces nouveaux éléments orbitaux osculateurs est à nouveau excellente ; les contributions d'ordre 2 à 12 valent respectivement -6.6×10^{-4} , -1.7×10^{-4} , -5.8×10^{-6} , 2.7×10^{-7} , 3.3×10^{-8} et 6.0×10^{-10} . L'inverse de la transformée de Lie évalue les éléments moyens à $\bar{e}'_1 = 0.152$, $\bar{e}'_2 = 0.191$, $\bar{i}'_1 = 16.86^\circ$ et $\bar{i}'_2 = 0^\circ$. Ces valeurs sont identiques à celles obtenues dans le repère précédent, à l'exception de la dernière, \bar{i}'_2 , qui est cette fois nulle. Cela ne signifie bien sûr pas que l'inclinaison moyenne de la planète extérieure est nulle puisque, suite aux transformations de découplage (7.2), les indices 1 et 2 ne sont plus attachés aux planètes 1 et 2 respectivement. La quantité i'_2 est ainsi une fonction reliée aux deux planètes qui, dans tous les exemples que nous avons testés, est très petite (de l'ordre de 10^{-7} au plus) dans le cas du plan de référence de Laplace, et même inférieure au niveau de précision auquel nous pouvons prétendre. Ce fait inattendu est à considérer de la même manière que la symétrie cachée découverte à la Section 7.1.2. Une conséquence intéressante de cette seconde *symétrie cachée* est que la seconde moyennisation (cfr Eq. (7.12)) n'est plus nécessaire. En effet, tous les termes de la seconde somme de l'équation (7.7) possèdent le facteur \bar{S}'_2 et donc s'annulent dans ce second référentiel. L'Hamiltonien moyen étant évalué à des valeurs identiques des trois autres moments, nous trouvons donc la même convergence numérique de $\bar{\mathcal{K}}'$ et les mêmes fréquences fondamentales que dans le repère précédent. Seule la manière dont celles-ci sont combinées pour engendrer le comportement séculaire des différents éléments orbitaux est différente, comme en témoignent les paragraphes suivants.

Les variations temporelles des différentes variables (dans un intervalle de 1.75×10^5 ans) sont rassemblées à la Figure 7.3. Tout d'abord, il saute aux yeux que les comportements séculaires des excentricités et de la différence des longitudes des péricentres sont identiques à ceux de la Section 7.2.1. Ensuite, la condition (6.11) inhérente au choix du plan de Laplace est bien représentée par une différence des longitudes des noeuds constante à 180° . De plus, le changement de référentiel est également clairement visible sur les graphes des arguments des péricentres et sur le graphe des inclinaisons où les amplitudes des oscillations sont très réduites.

Afin d'interpréter ces différences en termes de fréquences, nous reproduisons, à la Table 7.3, les résultats de l'analyse en fréquence. Le choix du plan de Laplace n'induit aucune variation sur le couplage entre les excentricités et la différence des longitudes des péricentres. Par contre, les inclinaisons ne sont plus liées à la différence des longitudes des noeuds (qui est constante dans le plan de Laplace) mais aux deux angles : $2\omega_1$ et $\Delta\varpi$. Ce fait est illustré à la Figure 7.4. En effet, la fréquence principale des inclinaisons est le taux de précession de l'angle $2\omega_1$, de sorte que, abstraction faite des autres périodes du mouvement, les extrema *locaux* de i_i sont atteints lorsque $\sin(2\omega_1) = 0$. De plus, contrairement au premier système de référence, les inclinaisons i_i sont également fortement influencées par la fréquence principale des excentricités e_i (ou de façon équivalente par le taux de précession de $\Delta\varpi$). Ainsi, abstraction faite des autres périodes, les extrema *globaux* de i_i correspondent à $\sin(\Delta\varpi) = 0$. En conclusion, les mouvements à

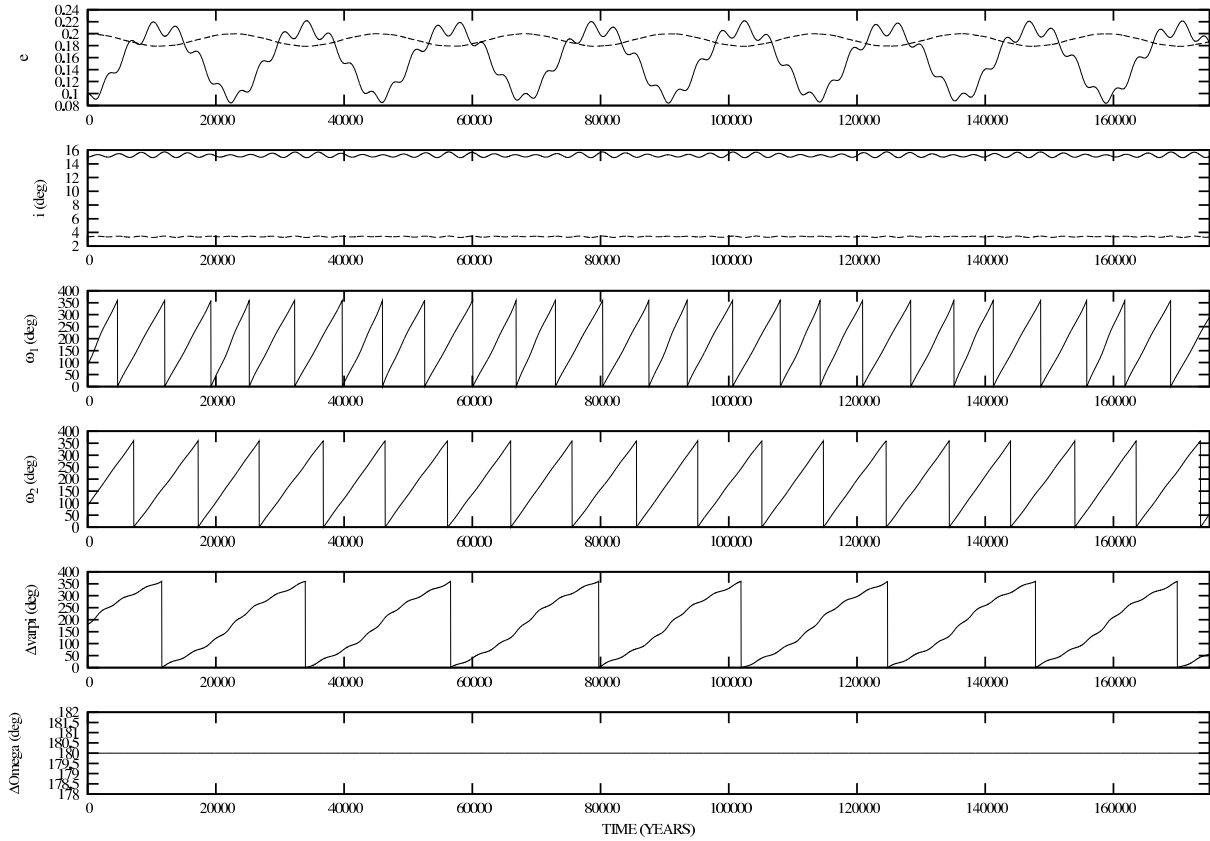


FIG. 7.3: Mêmes représentations qu'à la Figure 7.2 de l'évolution séculaire du même système fictif mais considéré, cette fois, dans le référentiel lié au plan de Laplace (cfr Section 7.2.2)

TAB. 7.3: Résultats principaux quant au comportement séculaire du système fictif de la Section 7.2.2, obtenus par décomposition en fréquences des éléments reproduits à la Figure 7.3. Les périodes sont exprimées en années.

Périodes	e	i	ω_1	ω_2	$\Delta\varpi$	$2\omega_1$	Identification
22 699	c_1	c_3	c_2	c_2	\mathbf{c}_1, c_2	c_2	$-\dot{p}'_1 + \dot{p}'_2$
3 415	c_2	c_1	c_4	c_3	c_4	\mathbf{c}_1, c_4	$-2\dot{p}'_1 + 2\dot{q}'_1$
11 350	c_3		c_3		c_3	c_3	$-2\dot{p}'_1 + 2\dot{p}'_2$
4 020	c_4	c_2		c_4			$-\dot{p}'_1 - \dot{p}'_2 + 2\dot{q}'_1$
2 969			c_5		c_5	c_5	$-3\dot{p}'_1 + \dot{p}'_2 + 2\dot{q}'_1$
6 830			\mathbf{c}_1				$-\dot{p}'_1 + \dot{q}'_1$
4 885		c_4		c_5			$-2\dot{p}'_2 + 2\dot{q}'_1$
9 770				\mathbf{c}_1			$-\dot{p}'_2 + \dot{q}'_1$

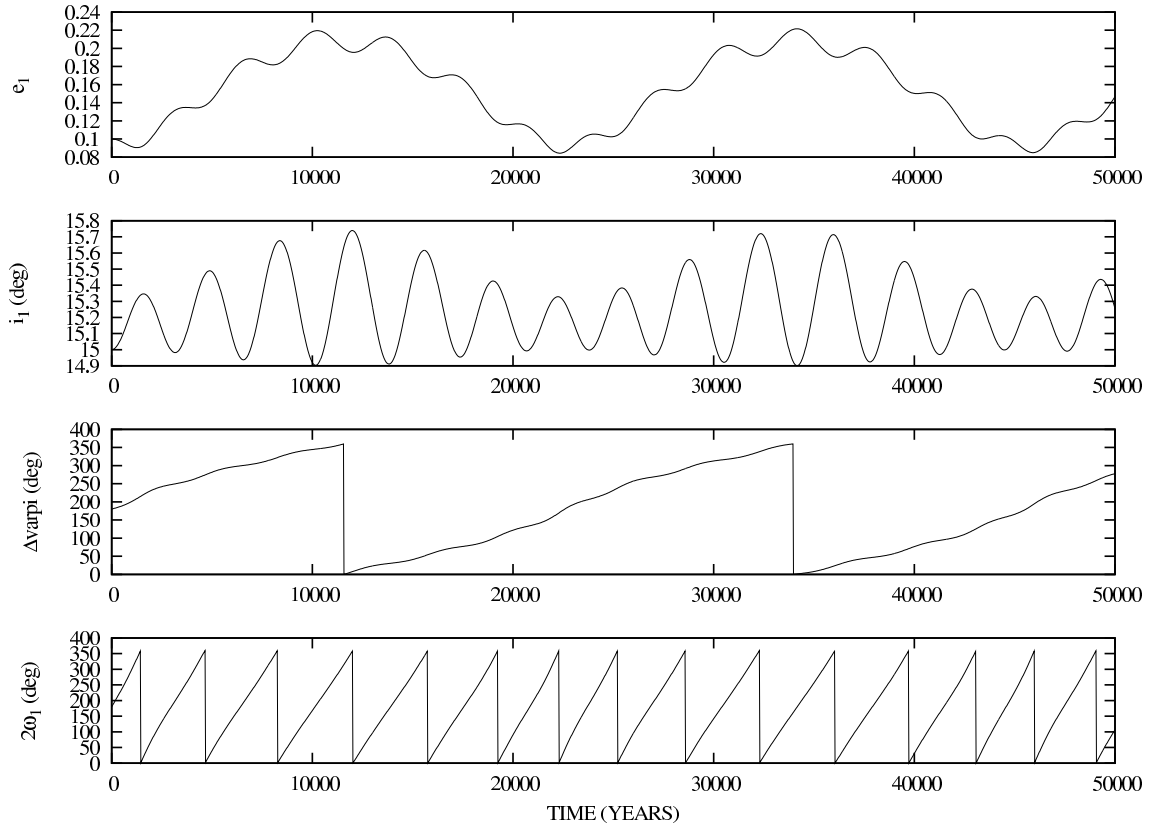


FIG. 7.4: Comportement à long terme de, *de haut en bas*, l'excentricité et l'inclinaison de la planète intérieure, la différence des longitudes des péricentres et l'angle $2\omega_1$ de la Figure 7.3, limité aux 5×10^4 premières années. L'influence du taux de précession de $\Delta\varpi$ sur e_1 et i_1 est évidente (longue période de 22 699 ans), tout autant que celle de $2\omega_1$ (courte période de 3 415 ans). Ce couplage entre excentricités et inclinaisons est caractéristique du plan de Laplace.

long terme des excentricités et des inclinaisons sont régis par les mêmes fréquences principales dans le repère lié au plan de Laplace : les extrema locaux sont induits par la courte période que constitue le taux de précession de l'angle $2\omega_1$ et les extrema globaux par la longue période qu'est le taux de précession de $\Delta\varpi$.

Finalement, concernant l'identification des fréquences de la Table 7.3, nous constatons que toutes les fréquences du plan de Laplace ne sont des combinaisons linéaires que de deux fréquences : $-\dot{p}'_1 + \dot{p}'_2$ et $-\dot{p}'_1 + \dot{q}'_1$. Dans le référentiel précédent, des combinaisons comprenant la fréquence fondamentale \dot{q}'_2 , comme $-\dot{p}'_2 + \dot{q}'_2$ et $\dot{q}'_1 - \dot{q}'_2$, étaient également présentes.

7.2.3 Précision de l'approche totalement analytique

Il reste à traiter de la précision de notre approche analytique dans le cas tridimensionnel abordé ici. Pour ce faire, nous avons intégré numériquement le problème des trois corps à l'aide du logiciel SWIFT et reporté, à la Figure 7.5, le comportement à long terme de l'excentricité de la planète intérieure et de la différence des longitudes des péricentres du système fictif de la

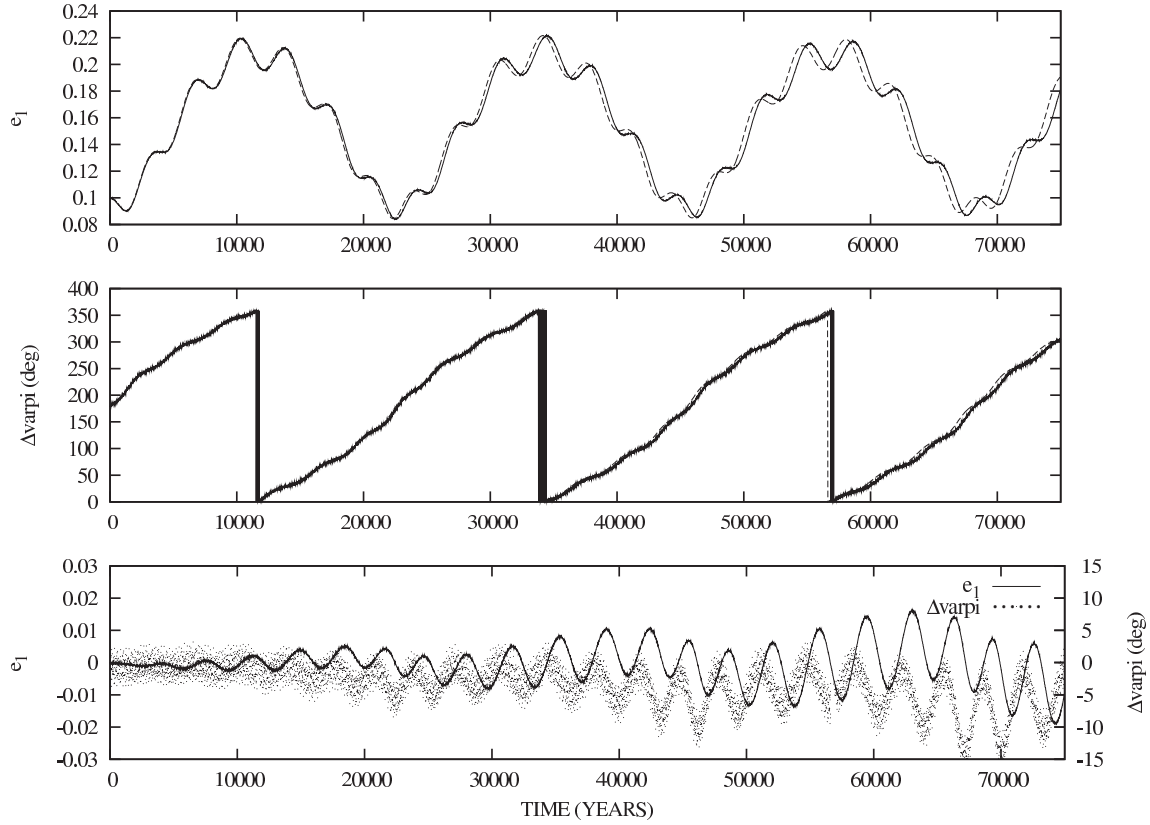


FIG. 7.5: Comparaison entre les évolutions temporelles de l'excentricité e_1 (au-dessus) et de l'angle $\Delta\varpi$ (au milieu) du système fictif de la Section 7.2.1, obtenues par notre théorie analytique (lignes en traits pointillés) et par intégration numérique du problème des trois corps général (lignes en traits continus, les anomalies moyennes sont fixées à $M_1 = 50^\circ$ et $M_2 = 0^\circ$). Graphe inférieur : Différences entre les deux approches (e_1 en traits continus et $\Delta\varpi$ en traits pointillés).

Section 7.2.1 (lignes en traits continus), qui y est comparé aux résultats fournis par notre théorie totalement analytique (lignes en traits pointillés). La concordance entre les deux résultats est excellente, surtout lorsque l'on tient compte du fait que les conditions initiales de l'intégration numérique devraient être légèrement modifiées pour prendre en compte les termes à courtes périodes négligés dans notre théorie analytique.

Une remarque intéressante peut être formulée quant à la convergence des Hamiltoniens \mathcal{K} (6.6) et $\bar{\mathcal{K}}'$ (7.13). Le chapitre précédent a montré que la convergence numérique de l'Hamiltonien (6.6) est vérifiée pour un large éventail de conditions initiales. Il est important de remarquer que la convergence de l'Hamiltonien moyenné (7.13) est plus limitée (et toujours fortement influencée par le choix des conditions initiales), ce qui restreint également son cadre d'application (essentiellement à des valeurs des excentricités et de l'inclinaison mutuelle pas trop élevées). Par exemple, du fait de l'inclinaison mutuelle importante caractérisant la résonance de Kozai, l'étude du voisinage de cette dernière ne peut pas être envisagée par notre approche analytique.

Finalement, il est également important de préciser que notre technique de perturbation ne peut pas être appliquée dans le cas de résonances séculaires. Jusqu'à présent, aucun système extrasolaire n'est caractérisé par une telle résonance (voir la résonance séculaire non-linéaire à hautes excentricités au Chapitre 3 ou, au Chapitre 6, la résonance de Kozai impliquant une inclinaison mutuelle considérable des plans orbitaux, indétectable à ce jour). Rappelons à ce propos que la libration de la différence angulaire des lignes des apsides observée dans certains exosystèmes (e.g. ν Andromède, cfr également Section 7.4) n'est qu'une caractéristique cinématique mais ne témoigne d'aucune résonance séculaire.

7.3 Sensibilité aux conditions initiales

Puisque les incertitudes actuelles des données observationnelles sont grandes, il est intéressant de considérer les effets à long terme que pourrait produire un changement de la valeur initiale d'un des éléments orbitaux osculateurs. Une telle étude de sensibilité aux conditions initiales peut être aisément menée grâce à notre modèle tridimensionnel totalement analytique. Dans cette section, nous choisissons de nous concentrer sur la sensibilité du système de la Section 7.2.1 aux valeurs initiales des arguments des péricentres (ω_1 et ω_2) et des longitudes des noeuds (Ω_1 et Ω_2). Pour chaque ensemble de conditions initiales, nous vérifions les convergences numériques de l'Hamiltonien \mathcal{K} d'ordre 12 et de l'Hamiltonien moyenné $\bar{\mathcal{K}}$. Comme les variations des valeurs initiales de ω_1 et ω_2 (ou Ω_1 et Ω_2) engendrent des résultats similaires, nous discutons seulement de la variation des angles associés à la masse m_1 . Les résultats du développement limité à l'ordre 10 repris à la Table 7.1 étant eux-mêmes assez précis, les calculs suivants sont limités à cet ordre.

Nous prêtons d'abord attention aux changements induits sur les fréquences fondamentales. La Figure 7.6 évalue les trois périodes $T_{\bar{p}'_1}$, $T_{\bar{p}'_2}$ et $T_{\bar{q}'_1}$ pour des valeurs initiales de ω_1 comprises entre 0° et 360° (lignes en traits continus). Tous les autres paramètres sont identiques à ceux de la Section 7.2.1. Nous faisons de même pour différentes valeurs initiales de Ω_1 (lignes en traits pointillés). Nous constatons que les conditions initiales Ω_1 exercent une influence plus importante sur les périodes (variations de l'ordre du millier d'années) que ne le font les conditions initiales ω_1 (variations de l'ordre d'une centaine d'années).

Ensuite, nous nous intéressons aux changements produits sur la différence des longitudes des péricentres $\Delta\varpi$ et sur la différence des longitudes des noeuds $\Delta\Omega$ par une variation de la valeur initiale de ω_1 . La Figure 7.7 montre l'évolution de l'amplitude d'oscillation des angles $\Delta\varpi$ (graphe de gauche) et $\Delta\Omega$ (graphe de droite) pour des valeurs initiales de ω_1 comprises entre 0° et 360° . Une amplitude fixée à 180° indique la circulation de l'angle. C'est le cas du système de la Section 7.2.1 qui est au milieu des zones de circulation de la Figure 7.7. Cependant, nous observons que, pour certaines valeurs initiales de ω_1 , il existe une possibilité d'oscillation autour de $\Delta\varpi = 0^\circ$. Ces valeurs sont centrées autour de la condition initiale $\omega_1 = 90^\circ$ pour laquelle l'amplitude d'oscillation de $\Delta\varpi$ est la plus faible et qui correspond à une valeur initiale de $\Delta\varpi$ de 0° . Concernant la différence des longitudes des noeuds, seule la circulation de l'angle $\Delta\Omega$

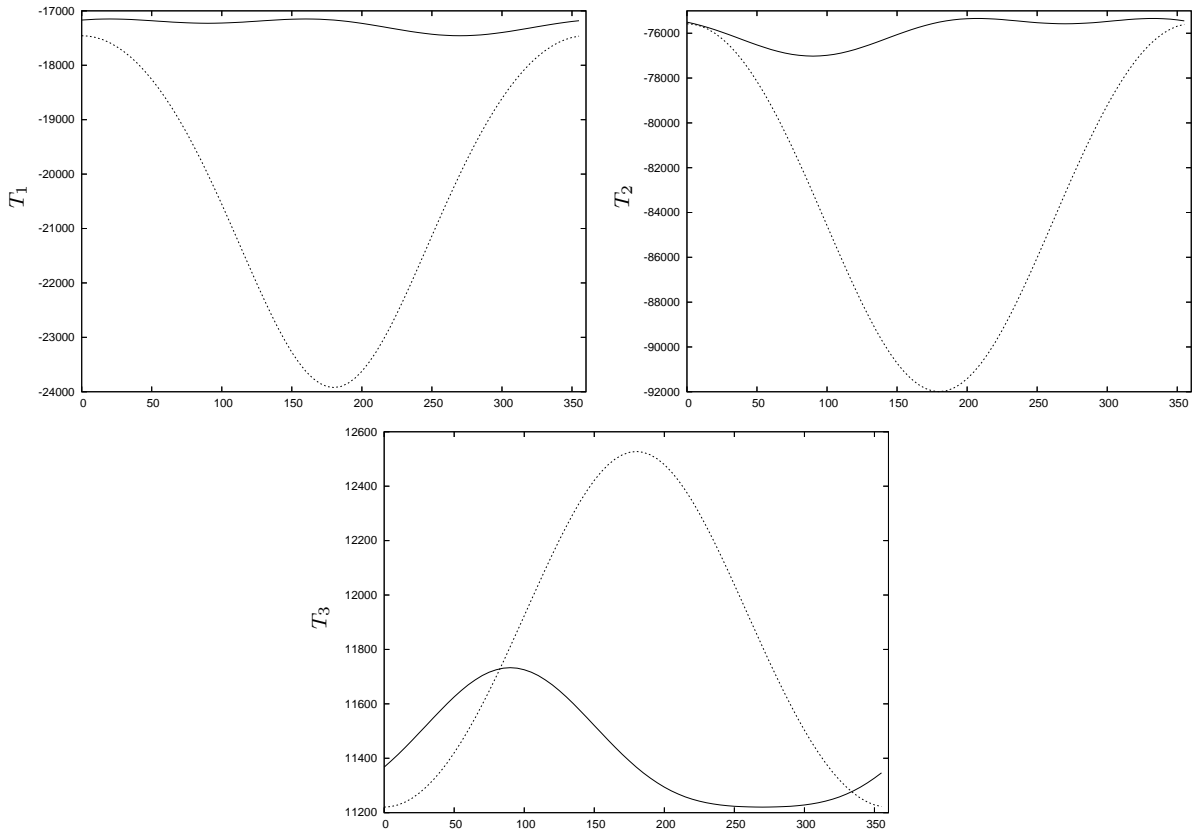


FIG. 7.6: Sensibilité des trois périodes fondamentales ($T_1 = T_{\bar{p}'_1}$, $T_2 = T_{\bar{p}'_2}$ et $T_3 = T_{\bar{q}'_1}$) à l'argument du péricentre initial (*lignes en traits continus*) et à la longitude du noeud initiale (*lignes en traits pointillés*) de la masse m_1 . Les périodes sont calculées tous les intervalles de condition initiale de 5° .

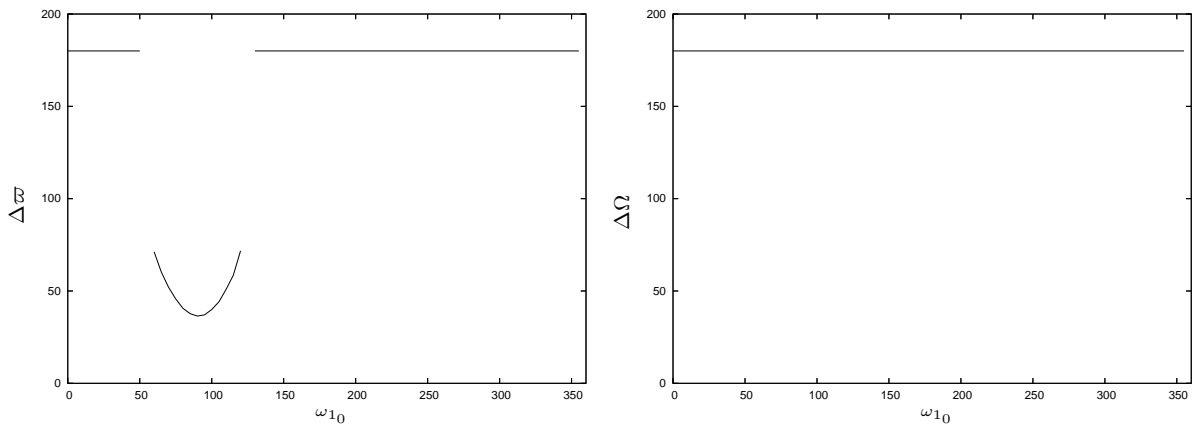


FIG. 7.7: Sensibilité, à la valeur initiale de ω_1 , de la différence des longitudes des péricentres $\Delta\varpi$ (à gauche) et de la différence des longitudes des noeuds $\Delta\Omega$ (à droite). Les amplitudes d'oscillation sont données en degrés. Une amplitude fixée à 180° indique la circulation de l'angle.

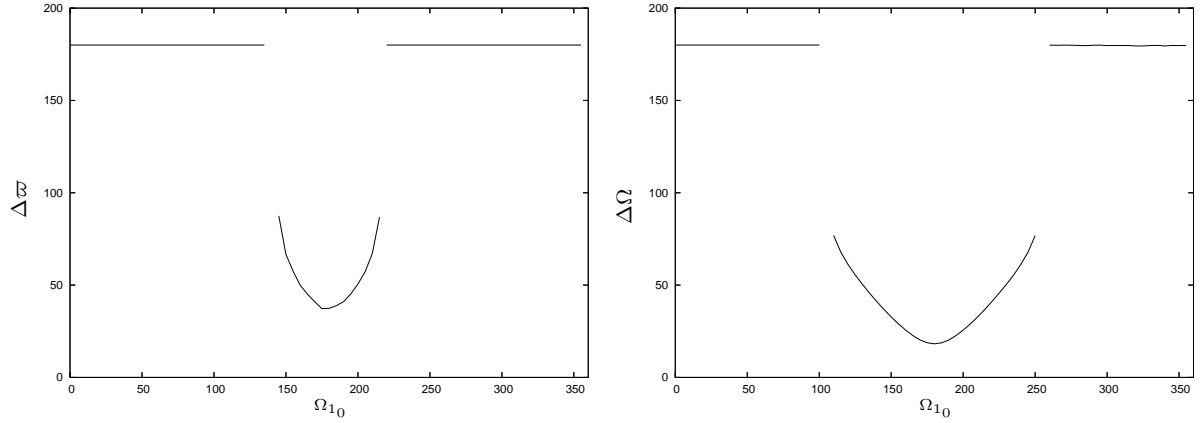


FIG. 7.8: Sensibilité, à la valeur initiale de Ω_1 , de la différence des longitudes des péricentres $\Delta\varpi$ (à gauche) et de la différence des longitudes des noeuds $\Delta\Omega$ (à droite)

est possible, quelle que soit la valeur initiale de ω_1 .

La Figure 7.8 montre que différentes valeurs initiales de Ω_1 produisent, comme précédemment, soit une circulation, soit une libration (autour de 0°) de la différence des longitudes des péricentres $\Delta\varpi$ (graphe de gauche). La nouvelle particularité est l'existence d'une zone de libration de la différence de la longitude des noeuds $\Delta\Omega$ autour 180° (graphe de droite).

En conclusion, les graphes de cette section ont montré que, tout comme dans le problème coplanaire, une petite variation des conditions initiales peut produire des résultats sur la dynamique séculaire assez différents. Les périodes et amplitudes des oscillations sont assez sensibles aux valeurs initiales des éléments orbitaux. Cela donne une idée des conséquences sur le comportement à long terme qui peuvent découler des imprécisions actuelles dans les observations.

Une dernière remarque intéressante peut être faite en regard de l'inclinaison mutuelle des deux plans orbitaux. Varier la longitude du noeud de la planète intérieure (ou de façon équivalente la différence des longitudes des noeuds $\Delta\Omega$) revient à varier l'inclinaison mutuelle I_{mut} . En fait, si nous considérons le triangle sphérique formé par les deux plans orbitaux (des masses m_1 et m_2) et le plan de base, nous trouvons la relation :

$$\cos I_{mut} = \cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos \Delta\Omega. \quad (7.18)$$

Donc, $\Delta\Omega = 0^\circ$ correspond à la valeur minimale de l'inclinaison mutuelle I_{mut} , à savoir $i_1 - i_2$. La valeur maximale de I_{mut} , $i_1 + i_2$, est quant à elle atteinte en $\Delta\Omega = 180^\circ$. A propos du système de la Section 7.2.1, une augmentation de la valeur initiale de l'angle Ω_1 de 0° à 180° est équivalente à une augmentation de l'inclinaison mutuelle initiale de $18,37^\circ$ à $25,11^\circ$.

Dans la section suivante, nous considérons le système extrasolaire v Andromède et nous préoccupons des changements dans la dynamique séculaire de ce système causés par une augmentation de l'inclinaison mutuelle initiale.

7.4 Effets d'une augmentation de l'inclinaison mutuelle sur la dynamique séculaire de l'exosystème ν Andromède

Dans cette section, nous étudions le comportement à long terme du système extrasolaire ν Andromède (c-d). Dans le cas de ce même système supposé coplanaire, nous avons vu, au Chapitre 4, que la différence angulaire des lignes des apsides, $\Delta\varpi$, est en libration autour de 0° . Nous cherchons à déterminer si cette configuration apsidale est maintenue malgré une augmentation de l'inclinaison mutuelle initiale des deux plans orbitaux.

La dynamique d'un système est très sensible à ses conditions initiales, comme nous l'avons mis en évidence à de maintes reprises. Actuellement les observations des systèmes extrasolaires ne sont pas en mesure de fournir des précisions quant aux inclinaisons des orbites et donc ne déterminent qu'une partie des éléments képlériens. Ainsi il reste un grand espace de paramètres initiaux (inclinaisons et longitudes des noeuds) à étudier pour caractériser la dynamique possible d'un système découvert.

Afin d'explorer cet espace de conditions initiales, nous choisissons d'aborder cette étude de la même manière que [Stepinski et al., 2000] : considérant fixées les valeurs des inclinaisons des planètes, nous nous intéressons aux changements de la dynamique dus à une variation de la longitude du noeud de la planète extérieure (ou, de façon équivalente, à une variation de la différence des longitudes des noeuds). Nous avons vu, à l'équation (7.18), que cela revient à considérer les changements produits par une variation de l'inclinaison mutuelle I_{mut} . Afin de comparer leurs résultats numériques à ceux de notre modèle analytique, nous adoptons la paramétrisation "Lick" du système ν Andromède (c-d) utilisée dans [Stepinski et al., 2000] ($m_0 = 1.3M_\odot$, $m_1 \sin i_1 = 1.88942M_J$, $m_2 \sin i_2 = 3.90870M_J$, $a_1 = 0.8282$ UA, $a_2 = 2.5334$ UA, $e_1 = 0.3478$, $e_2 = 0.2906$, $\omega_1 = 248.21^\circ$ et $\omega_2 = 242.99^\circ$). Le référentiel que nous considérons est tel que l'angle i_i correspond à l'inclinaison du plan orbital de la masse m_i par rapport au plan du ciel.

La Figure 7.9 présente le cas d'une inclinaison initiale de 30° des deux plans orbitaux par rapport au plan du ciel ($\sin i_1 = \sin i_2 = 0.5$). Par conséquent, les masses des planètes indiquées précédemment doivent être doublées. Nous montrons l'évolution de la dynamique du système pour quelques valeurs de l'inclinaison mutuelle initiale I_{mut} : 0° ($\Omega_2 - \Omega_1 = 0^\circ$, première colonne), 7.5° ($\Omega_2 - \Omega_1 = 15^\circ$, deuxième colonne) et 15° ($\Omega_2 - \Omega_1 = 30^\circ$, troisième colonne). Les variations temporelles, sur un intervalle de 2×10^4 ans, reprises à la Figure 7.9 correspondent, de haut en bas, aux excentricités, à la différence des longitudes des péricentres $\Delta\varpi$, à la différence des longitudes des noeuds $\Delta\Omega$ et à l'inclinaison mutuelle I_{mut} .

Les graphes de la première colonne correspondent au système ν Andromède (de masses doubles) supposé coplanaire et sont issus de l'étude totalement analytique menée dans le cas coplanaire au Chapitre 4. Comme nous l'avons déjà évoqué, nous remarquons que la planète intérieure subit une variation importante en excentricité à tel point que son orbite est presque

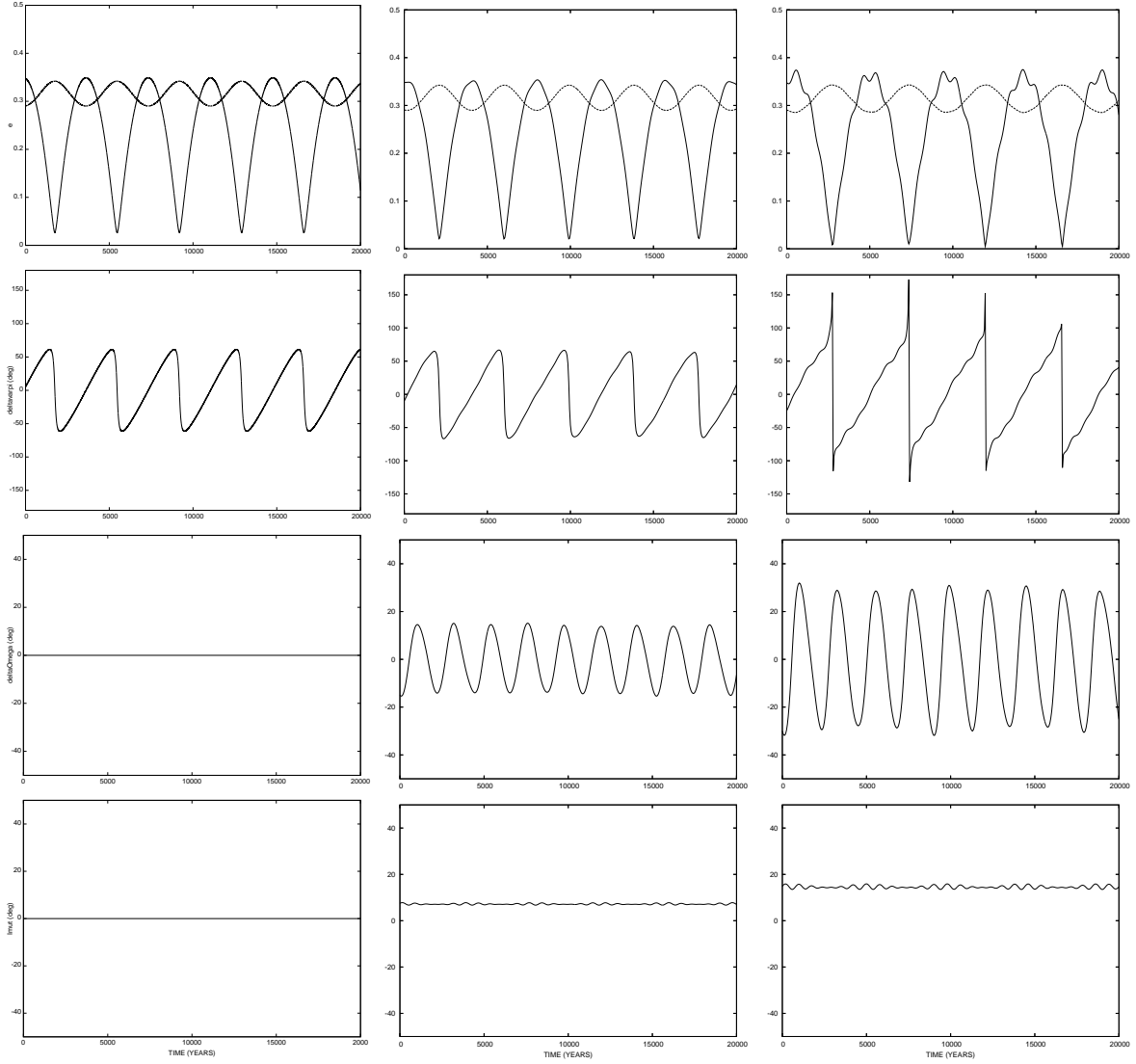


FIG. 7.9: Evolutions temporelles (sur 2×10^4 ans) du système ν Andromède d'inclinaisons $\sin i_1 = \sin i_2 = 0.5$, pour différentes valeurs initiales de l'inclinaison mutuelle des plans orbitaux : 0° (première colonne), 7.5° (deuxième colonne) et 15° (dernière colonne). Sont représentés, de haut en bas, les excentricités, la différence des longitudes des péricentres $\Delta\varpi$, la différence des longitudes des noeuds $\Delta\Omega$ et l'inclinaison mutuelle I_{mut} .

circulaire, tous les 3 718 ans dans le cas de masses doublées. La différence angulaire des lignes des apsides $\Delta\varpi$ est en libration autour de 0° avec une amplitude de 61° et la même fréquence $(-\dot{p}_1 + \dot{p}_2)$, qui est la seule à caractériser le mouvement dans le cas coplanaire.

A première vue, la seconde inclinaison mutuelle initiale considérée, 7.5° (deuxième colonne), présente des évolutions des excentricités et de $\Delta\varpi$ très similaires. En effet, comme nous l'avons mis en évidence à la Section 7.2, trois fréquences fondamentales sont associées à ce problème des trois corps tridimensionnel séculaire et la combinaison principale des fréquences influençant les excentricités et l'angle $\Delta\varpi$ est, semblablement au cas coplanaire, $-\dot{p}_1 + \dot{p}_2$. Nous

constatons que la valeur de cette dernière décroît dès lors que l'inclinaison mutuelle initiale augmente (période de 4 234 ans pour la condition initiale $I_{mut} = 7.5^\circ$). De plus, la différence des longitudes des noeuds oscille également autour de 0° avec une amplitude proche de la différence initiale $\Omega_2 - \Omega_1$. L'inclinaison mutuelle reste toujours proche de sa valeur initiale. Quant aux grandes variations séculaires observées sur les excentricités, elles sont également présentes dans l'étude numérique de [Stepinski et al., 2000]. La bonne concordance entre les deux travaux donne une idée de la précision pouvant être atteinte par notre méthode totalement analytique, malgré les excentricités importantes et l'introduction d'une inclinaison mutuelle des deux plans orbitaux non-négligeable.

Pour des inclinaisons mutuelles supérieures (par exemple celle de la dernière colonne de la Figure 7.9), des variations séculaires de plus grande amplitude sont observées. Les excentricités minimales atteintes par la planète intérieure approchent des valeurs aussi petites que 0.0001 et cela explique les singularités locales présentes dans le graphe de $\Delta\varpi$. Toutefois, nous notons encore une augmentation dans l'amplitude du mouvement de $\Delta\varpi$. Ces caractéristiques sont également rapportées dans les travaux numériques de [Chiang et al., 2001].

Finalement, afin de visualiser l'influence des masses des planètes sur la dynamique du système, nous considérons différentes valeurs des inclinaisons initiales des plans orbitaux par rapport au plan du ciel ($\sin i_1 = \sin i_2 = 0.25, 0.75$ et 1). Pour chaque valeur, nous trouvons le même genre de résultats, à savoir des variations séculaires plus importantes pour des inclinaisons mutuelles initiales I_{mut} plus élevées et une proximité de l'excentricité minimale de la planète intérieure à 0° . Plus les inclinaisons initiales des plans orbitaux par rapport au plan du ciel ($i_1 = i_2$) sont élevées, c'est-à-dire moins les masses réelles des planètes sont importantes, plus grande est la valeur de l'inclinaison mutuelle initiale I_{mut} pour laquelle une étroite proximité à zéro de l'excentricité e_1 est observée (environ 8° lorsque $\sin i_1 = \sin i_2 = 0.25$ et environ 16° lorsque $\sin i_1 = \sin i_2 = 1$).

Conclusions et perspectives

L'objectif de ce travail, à savoir la généralisation de l'approche analytique de Laplace-Lagrange obtenue en poussant le développement de la perturbation à un ordre largement supérieur en excentricités et en inclinaisons, est à présent atteint. Nous disposons ainsi d'un modèle analytique fiable et peu coûteux pouvant prendre en compte un large éventail de paramètres et rendant compte du comportement séculaire d'un système planétaire formé de deux planètes hors résonance en moyen mouvement et dont les plans orbitaux peuvent aussi bien être coplanaires (problème des trois corps coplanaire) que sécants (problème des trois corps tridimensionnel).

Malgré les limitations sur les valeurs maximales des excentricités et des inclinaisons pouvant être traitées par cette approche, nous avons montré que cette dernière peut être appliquée avec précision à tous les systèmes extrasolaires (non-résonants) actuellement détectés. Deux voies ont été explorées : d'une part, l'analyse des équilibres du problème séculaire et les implications de ces derniers sur la structure de l'espace de phase et d'autre part, le calcul des fréquences fondamentales de ce même problème permettant la reproduction de l'évolution temporelle du système planétaire, grâce à une méthode totalement analytique basée sur les transformées de Lie.

De même, nous avons entrepris une vérification de la proximité des différents systèmes extrasolaires recensés à l'heure actuelle à une quelconque résonance en moyen mouvement, grâce à une méthode de perturbation, par transformées de Lie, au premier ordre des masses.

Une des limites de notre modèle analytique est qu'il ne constitue une approximation de la dynamique qu'au premier ordre des masses. L'influence des anomalies moyennes M_i sur le comportement à long terme du système n'est dès lors pas prise en compte. Une future amélioration peut être attendue d'un développement de la fonction hamiltonienne à un degré supérieur des masses et d'une moyennisation de cette fonction à un ordre supérieur également.

Un autre prolongement intéressant réside dans l'introduction d'une force dissipative dans notre modèle ayant pour effet d'induire une décroissance orbitale d'une des deux planètes et d'ainsi investiguer les possibles captures du système en résonance en moyen mouvement ainsi que le calcul des probabilités de capture. Un tel phénomène pourrait être à l'origine des excentricités importantes observées dans de nombreux systèmes extrasolaires.

ANNEXES

Annexe A

Notations principales

TAB. A.1: Liste des symboles utilisés

Symbole	Signification	Référence
Lettres grecques		
α	rapport des demi-grands axes	(2.43)
β	angle de la transformation de découplage	(3.12)
$\Delta\Omega$	différence des longitudes des noeuds	
$\Delta\varpi$	différence des longitudes des péricentres	
λ	longitude moyenne (variable de Delaunay modifiée)	(2.18)
μ	rapport des masses défini par $m_1/(m_1 + m_2)$	(2.43)
ω	argument du péricentre	(B.3)
Ω	longitude du noeud ascendant	(B.3)
Φ	combinaison angulaire caractéristique du développement de \mathcal{H}	(2.17)
Σ	déficit de moment angulaire non-dimensionnel (cas tridimensionnel)	(6.16)
τ	temps de passage au péricentre	(B.3)
ϖ	longitude du péricentre	(2.18)
Opérations et ensembles		
\mathbb{R}^n	espace réel de dimension n	
Π^n	tore de dimension n	
$\circ.\circ$	notation d'un nombre fractionnaire	
$\dot{\circ}$	dérivée par rapport au temps	
$(\circ; \circ)$	parenthèse de Poisson	(2.29)
$\bar{\circ}$	valeur moyennée	

Symbole	Signification	Référence
Lettres latines		
a	demi-grand axe	(B.3)
C	norme du moment angulaire total	(6.10)
e	excentricité	(B.3)
E	quantité non-dimensionnelle définie par $\sqrt{(2P/L)}$	(2.40)
f	anomalie vraie	(B.3)
G	constante universelle de la gravitation	
\mathcal{H}	Hamiltonien du problème des trois corps	(2.16)
\mathcal{H}_{2B}	Hamiltonien du problème des deux corps	(B.5)
i	inclinaison	(B.3)
I_{mut}	inclinaison mutuelle	(7.18)
\mathcal{J}	matrice symplectique principale	(2.24)
\mathcal{K}	Hamiltonien \mathcal{H} moyenné par rapport à λ_i (cas coplanaire)	(3.6)
	(cas tridimensionnel)	(6.6)
\mathcal{K}'	Hamiltonien \mathcal{K} découplé (cas coplanaire)	(4.2)
	(cas tridimensionnel)	(7.5)
$\bar{\mathcal{K}}'$	Hamiltonien \mathcal{K}' moyenné par rapport à p'_i (cas coplanaire)	(4.5)
$\bar{\mathcal{K}}'$	Hamiltonien \mathcal{K}' moyenné par rapport à p'_i et q'_i (cas tridimensionnel)	(7.13)
l	anomalie moyenne (= M)	(B.6)
L	moment associé à λ dans les variables de Delaunay modifiées	(2.18)
m_0	masse du corps central	
m_i	masse du i -ème corps	
M_\odot	masse solaire	
M_J	masse de Jupiter	
M_T	masse de la Terre	
M	anomalie moyenne	(B.4)
n	moyen mouvement angulaire	(B.4)
p	- longitude du péricentre (variable de Delaunay modifiée)	(2.18)
P	moment associé à p dans les variables de Delaunay modifiées	(2.18)
q	- longitude du noeud (variable de Delaunay modifiée)	(2.18)
Q	moment associé à q dans les variables de Delaunay modifiées	(2.18)
S	quantité non-dimensionnelle définie par $\sqrt{(2Q/L)}$	(2.40)
U	déficit de moment angulaire non-dimensionnel (cas coplanaire)	(3.8)
v	différence des longitudes des péricentres (= $p_1 - p_2$)	(3.7)
w	- argument du péricentre	(6.8)
\mathcal{W}	générateur de la moyennisation par rapport à p_i et q_i (cas coplanaire)	(4.4)
	(cas tridimensionnel)	(7.6)
x	variable de type Poincaré $x = \sqrt{2P} \cos w$	(6.17)
y	variable de type Poincaré $y = \sqrt{2P} \sin w$	(6.17)

Annexe B

Problème des deux corps et variables de Delaunay modifiées

Le *problème des deux corps* est celui du mouvement de deux particules isolées, de symétrie sphérique et de masses m_0 et m_1 , soumises à une force gravitationnelle l'une vis-à-vis de l'autre. Ce problème, également dénommé problème képlérien, étant abordé dans de multiples ouvrages, nous en rappelons seulement brièvement les principaux résultats.

Dans un repère barycentrique, le problème des deux corps peut être modélisé sous forme d'un système de trois équations du second ordre :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{x}{\|\vec{r}\|^3} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \mu \frac{y}{\|\vec{r}\|^3} = 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \mu \frac{z}{\|\vec{r}\|^3} = 0, \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

avec $\mu = \frac{Gm_0^3}{(m_0+m_1)^2}$, système qui peut encore s'écrire

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}, \quad (\text{B.2})$$

où \vec{r} est le vecteur de coordonnées (x, y, z) indiquant la position du corps m_1 , la position de l'autre corps pouvant être déduite grâce à l'intégrale du centre de masse. L'équation (B.2) peut être résolue exactement, la solution dépend seulement des position et vitesse initiales. Résoudre le problème des deux corps est à la base d'un des grands succès de la théorie de la gravitation de Newton : la confirmation mathématique des trois *lois de Kepler*.

On peut montrer que les deux corps décrivent des trajectoires elliptiques similaires autour du barycentre du système et que le rapport entre les tailles de ces ellipses est inversement proportionnel au rapport des masses. Dans le cas planétaire où la masse d'un corps (*la planète*) est très faible par rapport à la masse de l'autre corps (*l'étoile*), l'orbite elliptique de l'étoile est ainsi

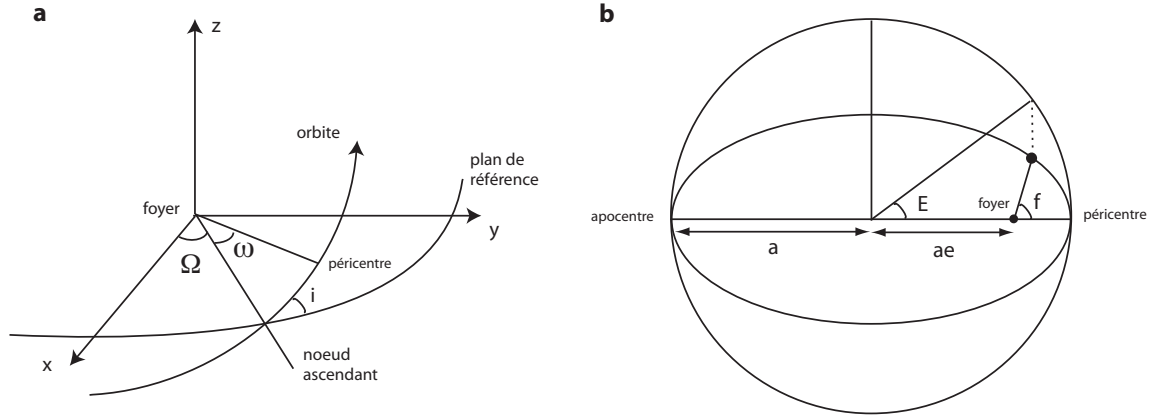


FIG. B.1: a) Orientation du plan orbital dans l'espace définie par l'inclinaison i , la longitude du noeud Ω et l'argument du péricentre ω . b) Caractéristiques géométriques de l'ellipse (demi-grand axe a et excentricité e) et définition de la position de la planète sur son ellipse (anomalie vraie f ou anomalie excentrique E)

très petite et se situe très près du barycentre du système, ce qui nous permet de considérer que la planète se déplace autour de l'étoile sur une orbite elliptique dont l'étoile est à l'un des foyers, raison pour laquelle l'étoile est généralement nommée *corps central*. Ceci n'est rien d'autre que l'énoncé de la première loi de Kepler.

La force étant centrale, le système possède une intégrale du moment cinétique. Celle-ci nous indique en particulier que le mouvement a lieu dans un plan et que le rayon vecteur engendre des aires égales en des temps égaux (deuxième loi de Kepler). De plus, le système possède également une intégrale d'énergie $E_{2B} = -\mu/2a$.

Au cours de la recherche de la solution du problème de Kepler, six constantes arbitraires d'intégration permettant de spécifier une trajectoire particulière sont introduites :

$$(a, e, i, \omega, \Omega, \tau). \quad (\text{B.3})$$

Ces quantités sont appelées *éléments orbitaux* et permettent de décrire les propriétés géométriques de l'ellipse parcourue par la planète ainsi que la position initiale de cette dernière sur l'ellipse.

Les caractéristiques géométriques de l'orbite sont déterminées par le *demi-grand axe* a et l'*excentricité* e (cfr Figure B.1b). L'orientation de l'ellipse dans l'espace est donnée, dans un repère orthogonal arbitraire (x, y, z) centré sur le corps central, par l'*inclinaison* i du plan orbital par rapport au plan de référence (x, y) , par la position angulaire du *noeud ascendant* (intersection entre le plan orbital et le plan de référence) par rapport à l'axe x appelée *longitude du noeud* Ω et par la position angulaire du *péricentre* (point de l'ellipse le plus proche du corps central) mesurée dans le plan de l'orbite et connue sous le nom d'*argument du péricentre* ω (cfr Figure B.1a). Dans la suite, nous appellerons *ligne des apsides* la droite reliant l'apocentre au

péricentre et supportant par conséquent le grand axe de l'orbite elliptique.

Reste à préciser la position de la planète sur l'ellipse. C'est le rôle de l'*anomalie vraie* f (cfr Figure B.1b). Cette dernière quantité peut être remplacée par le *temps de passage au péricentre* τ , défini dans l'*équation de Kepler* :

$$E - e \sin E = n(t - \tau), \quad (\text{B.4})$$

avec $n = \sqrt{\mu/a^3}$ le *moyen mouvement angulaire* et E l'*anomalie excentrique* représentée à la Figure B.1b. L'angle $n(t - \tau)$ porte, quant à lui, le nom d'*anomalie moyenne* M . Ainsi, le carré de la période du mouvement $T = 2\pi/n$ est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse (troisième loi de Kepler). Dans le problème des deux corps, l'orbite ne varie pas au cours du temps et seule la position du corps sur son ellipse dépend du temps.

Au lieu de résoudre le problème des deux corps lui-même comme nous venons de le faire, il est intéressant de préparer la “résolution”, par théorie des perturbations, d'autres problèmes qui sont proches de celui-ci, notamment le problème des trois corps. Les éléments elliptiques $(a, e, i, \omega, \Omega, \tau)$ ne sont pas canoniques. Un système de variables canoniques pour ce problème est $(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt})$. Exprimé dans ces variables, l'Hamiltonien correspondant au système (B.1) est alors

$$\mathcal{H}_{2B} = \frac{1}{2} \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|^2 - \frac{\mu}{\|\vec{r}\|}. \quad (\text{B.5})$$

Plus de détails concernant la formulation hamiltonienne peuvent être trouvés dans [Laskar, 1990] ou [Morbideilli, 2002].

En mécanique céleste, le choix des variables est très important. Un choix judicieux permet souvent de faciliter grandement la résolution d'un problème. Par la méthode d'Hamilton-Jacobi, nous trouvons un changement de variables canonique

$$(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}) \longrightarrow (l, g, h, L, G, H)$$

où (l, g, h, L, G, H) sont les *variables de Delaunay* :

$$\begin{array}{lll} l & \text{anomalie moyenne} & L = \sqrt{\mu a} \\ g(=\omega) & \text{argument du péricentre} & G = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \\ h(=\Omega) & \text{longitude du noeud ascendant} & H = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \cos i. \end{array} \quad (\text{B.6})$$

Le système (B.1) est dès lors équivalent à l'ensemble d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dL}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{2B}}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_{2B}}{\partial L} \\ \frac{dG}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{2B}}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_{2B}}{\partial G} \\ \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{2B}}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_{2B}}{\partial H} \end{array} \right. \quad (\text{B.7})$$

où \mathcal{H}_{2B} se formule dans les éléments de Delaunay :

$$\mathcal{H}_{2B} = -\frac{\mu}{2a} = -\frac{\mu^2}{2L^2}. \quad (\text{B.8})$$

Ce dernier ne dépend que du moment L et, par les relations (B.7), nous pouvons vérifier que toutes les variables sont constantes à l'exception de l'anomalie moyenne l dont le comportement est régi par l'équation suivante :

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\mu^2}{L^3} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \quad (\text{B.9})$$

Cette dernière quantité n'est autre que le *moyen mouvement angulaire* introduit précédemment sous la notation n (cfr Eq. (B.4)).

Les éléments de Delaunay peuvent présenter des inconvénients dans le cas où les excentricités et inclinaisons sont faibles. Cette observation a incité [Poincaré, 1892] à effectuer une transformation canonique dans le but de ramener les variables G et H à des variables de l'ordre de l'excentricité et de l'inclinaison :

$$(l, g, h, L, G, H) \longrightarrow (\lambda, p, q, L, P, Q)$$

où

$$\begin{array}{lll} \lambda = l + g + h & \text{longitude moyenne} & L = \sqrt{\mu a} \\ p = -g - h (= -\varpi) & \text{- longitude du péricentre} & P = L - G = \sqrt{\mu a}(1 - \sqrt{1 - e^2}) \\ q = -h (= -\Omega) & \text{- longitude du noeud ascendant} & Q = G - H = \sqrt{\mu a}(1 - e^2)(1 - \cos i). \end{array} \quad (\text{B.10})$$

Ces variables sont connues sous le nom d'*éléments de Delaunay modifiés*.

Il est à remarquer que ces variables ont encore l'inconvénient d'être *singulières* : les angles p et q ne sont pas définis lorsque les moments associés sont nuls, c'est-à-dire lorsque les excentricités et inclinaisons sont nulles. C'est pourquoi, si besoin est, nous travaillerons dans les *variables de Poincaré* :

$$\begin{array}{ll} y = \sqrt{2P} \sin p, & x = \sqrt{2P} \cos p \\ \tilde{y} = \sqrt{2Q} \sin q, & \tilde{x} = \sqrt{2Q} \cos q. \end{array} \quad (\text{B.11})$$

Annexe C

Développement analytique du problème des trois corps

Le problème planétaire des trois corps, constitué d'un corps central de masse m_0 et de deux planètes de masses m_1 et m_2 en interaction gravitationnelle, est décrit, dans un repère barycentrique, par les équations du mouvement :

$$\frac{d^2 \vec{u}_i}{dt^2} = -G \sum_{j \neq i} m_j \frac{\vec{u}_i - \vec{u}_j}{\|\vec{u}_i - \vec{u}_j\|^3} \quad (i = 0, 1, 2). \quad (\text{C.1})$$

Cette écriture compacte représente un système de neuf équations du second ordre :

$$\begin{cases} m_j \frac{d^2 \xi_j}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \\ m_j \frac{d^2 \eta_j}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial \eta_j} \\ m_j \frac{d^2 \zeta_j}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial \zeta_j} \end{cases} \quad (i = 0, 1, 2), \quad (\text{C.2})$$

où (ξ_j, η_j, ζ_j) sont les coordonnées du vecteur \vec{u}_j et

$$F = G \left(\frac{m_0 m_1}{r_{01}} + \frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \right), \quad (\text{C.3})$$

avec la notation r_{jk} symbolisant la norme de la différence des vecteurs \vec{u}_j et \vec{u}_k , c'est-à-dire $r_{jk}^2 = \|\vec{u}_j - \vec{u}_k\|^2 = (\xi_j - \xi_k)^2 + (\eta_j - \eta_k)^2 + (\zeta_j - \zeta_k)^2$.

Pour formuler l'Hamiltonien du problème des trois corps à partir des équations de la seconde loi de Newton, nous effectuons, dans cette annexe, un premier passage aux coordonnées de Jacobi suivi d'un second en faveur des éléments de Delaunay, tels qu'ils sont tous les deux décrits dans [Brouwer et Clemence, 1961]. Concernant le problème planétaire caractérisé par des corps de petites masses par rapport à celle du corps central, l'Hamiltonien peut encore être simplifié en ne considérant que les termes du second degré des masses. Nous obtenons finalement une expression de la fonction hamiltonienne du problème planétaire des trois corps sous

la forme d'une somme de deux problèmes de deux corps perturbés. Ces différentes étapes sont détaillées dans les sections suivantes.

C.1 Passage aux coordonnées de Jacobi

Un passage aux coordonnées de Jacobi permet d'effectuer la réduction du centre de masse et d'ainsi se ramener à un système de six équations du second ordre. Rappelons que le principe des coordonnées de Jacobi consiste à repérer chaque corps P_i par rapport au barycentre (G_{i-1} à la Figure 2.1) des i corps P_0, \dots, P_{i-1} précédents. Ainsi, si $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ représente, comme précédemment, les coordonnées du corps central et des deux planètes dans un repère barycentrique, les coordonnées de Jacobi pour la première composante sont définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 - \xi_0 \\ x_2 &= \xi_2 - \xi_0 - \kappa_1(\xi_1 - \xi_0), \end{aligned} \tag{C.4}$$

où $\kappa_1 = \frac{m_1}{m_0 + m_1}$. On peut faire de même pour les composantes y_i et z_i .

Nous cherchons à présent l'équivalence des équations (C.2) dans les coordonnées de Jacobi. La dérivée seconde des variables de Jacobi se calcule aisément en combinant les équations (C.2) et (C.4) :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} - \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} \\ &= \frac{1}{m_1} \frac{\partial F}{\partial \xi_1} - \frac{1}{m_0} \frac{\partial F}{\partial \xi_0} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} - \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} - \kappa_1 \frac{d^2 (\xi_1 - \xi_0)}{dt^2} \\ &= \frac{1}{m_2} \frac{\partial F}{\partial \xi_2} - \frac{1}{m_0 + m_1} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_0} + \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \right), \end{aligned} \tag{C.5}$$

et identiquement pour les composantes y_i et z_i .

Comme $\frac{\partial F}{\partial \xi_j} = \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j}$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \xi_0} &= -\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial F}{\partial x_2}. \end{aligned} \tag{C.6}$$

En substituant ces derniers résultats dans les équations précédentes, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_1}{dt^2} &= \frac{m_0 + m_1}{m_0m_1} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= \frac{m_0 + m_1 + m_2}{(m_0 + m_1)m_2} \frac{\partial F}{\partial x_2},\end{aligned}\tag{C.7}$$

et similairement pour y_i et z_i .

Notons \vec{r}_i le vecteur de Jacobi de coordonnées (x_i, y_i, z_i) de sorte que la norme de ce vecteur soit égale à

$$\begin{aligned}r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ r_2^2 &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2.\end{aligned}\tag{C.8}$$

Par conséquent, nous trouvons les équivalences

$$\begin{aligned}r_{01}^2 &= r_1^2 \\ r_{02}^2 &= (\xi_2 - \xi_0)^2 + (\eta_2 - \eta_0)^2 + (\zeta_2 - \zeta_0)^2 \\ &= (x_2 + \kappa_1 x_1)^2 + (y_2 + \kappa_1 y_1)^2 + (z_2 + \kappa_1 z_1)^2 \\ &= r_2^2 + 2\kappa_1(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + \kappa_1^2 r_1^2.\end{aligned}\tag{C.9}$$

Introduisons les notations κ_2, m_1', m_2' dont les expressions sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\kappa_2 &= \frac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2} \\ m_1' &= \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} \\ m_2' &= \frac{(m_0 + m_1)m_2}{m_0 + m_1 + m_2}.\end{aligned}\tag{C.10}$$

Sachant que $\frac{\partial F}{\partial x_1} = -Gm_0m_1 \frac{x_1}{r_1^3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{Gm_0m_2}{r_{02}} + \frac{Gm_1m_2}{r_{12}} \right)$, $\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{-1}{r_2} \right) = 0$ et que $\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{-1}{r_2} \right) = \frac{x_2}{r_2^3}$, les équations de mouvement (C.7) s'écrivent finalement

$$\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{Gm_0m_1}{m_1' r_1^3} x_1 = \frac{\partial R_1}{\partial x_1} \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{Gm_0m_2}{m_2' r_2^3} x_2 = \frac{\partial R_2}{\partial x_2}, \end{cases}\tag{C.11}$$

où $R_1 = \frac{R}{m_1}, R_2 = \frac{R}{m_2}$ et $R = G \left[\frac{m_1m_2}{r_{12}} + m_0m_2 \left(\frac{1}{r_{02}} - \frac{1}{r_2} \right) \right]$.

C.2 Passage aux éléments de Delaunay

Par un passage aux coordonnées de Delaunay, de façon similaire à celui réalisé à l'Annexe B dans le cas du problème des deux corps, le système précédent est équivalent à, pour $j = 1, 2$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dL_j^*}{dt} = -\frac{\partial F_j^*}{\partial l_j}, & \frac{dl_j}{dt} = \frac{\partial F_j^*}{\partial L_j^*} \\ \frac{dG_j^*}{dt} = -\frac{\partial F_j^*}{\partial g_j}, & \frac{dg_j}{dt} = \frac{\partial F_j^*}{\partial G_j^*} \\ \frac{dH_j^*}{dt} = -\frac{\partial F_j^*}{\partial h_j}, & \frac{dh_j}{dt} = \frac{\partial F_j^*}{\partial H_j^*}, \end{array} \right. \quad (C.12)$$

où $F_j^* = -\frac{\mu_j}{2a_j} - R_j$ et $\mu_j = \frac{Gm_0m_j}{m_j}$,

avec $L_j^* = \sqrt{\mu_j a_j}$, $G_j^* = L_j^* \sqrt{1 - e_j^2}$, $H_j^* = G_j^* \cos i_j$.

Ces équations ont l'inconvénient que les Hamiltoniens F_j^* sont différents pour $j = 1$ et $j = 2$. Cela peut être évité en posant

$$L_j = L_j^* m_j', \quad F = F_j^* m_j'. \quad (C.13)$$

Finalement, les équations du mouvement sont, pour $j = 1, 2$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dL_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial l_j}, & \frac{dl_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L_j} \\ \frac{dG_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial g_j}, & \frac{dg_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial G_j} \\ \frac{dH_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial h_j}, & \frac{dh_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial H_j}, \end{array} \right. \quad (C.14)$$

avec

$$\begin{aligned} F &= -\frac{Gm_0m_1}{2a_1} - \frac{Gm_0m_2}{2a_2} - G \left[\frac{m_1m_2}{r_{12}} + m_0m_2 \left(\frac{1}{r_{02}} - \frac{1}{r_2} \right) \right] \\ L_1 &= m_1' \sqrt{\mu_1 a_1} = m_1 \sqrt{\frac{Gm_0^2 a_1}{m_0 + m_1}} \\ L_2 &= m_2' \sqrt{\mu_2 a_2} = m_2 \sqrt{\frac{Gm_0(m_0 + m_1)a_2}{m_0 + m_1 + m_2}}. \end{aligned} \quad (C.15)$$

L'Hamiltonien du problème des trois corps dans les variables canoniques de Delaunay exprimées dans le repère de Jacobi vaut donc

$$\mathcal{H} = -\frac{Gm_0m_1}{2a_1} - \frac{Gm_0m_2}{2a_2} - G \left[\frac{m_1m_2}{r_{12}} + m_0m_2 \left(\frac{1}{r_{02}} - \frac{1}{r_2} \right) \right]. \quad (C.16)$$

C.3 Développement de l'Hamiltonien au second degré des masses

L'hypothèse de planètes de petites masses nous permet de limiter l'Hamiltonien (C.16) aux termes de second degré des petites quantités m_1 et m_2 .

Pour ce faire, concentrons-nous d'abord sur la dernière parenthèse de l'équation (C.16). Par définition, nous avons

$$\vec{r}_{02} = \vec{r}_2 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} \vec{r}_1, \quad (\text{C.17})$$

soit en termes de norme

$$r_{02} = \sqrt{r_2^2 + \frac{2m_1}{m_0 + m_1} (\vec{r}_1 | \vec{r}_2) + \left(\frac{m_1}{m_0 + m_1} \right)^2 r_1^2}, \quad (\text{C.18})$$

où le dernier terme d'ordre $\mathcal{O}(m_1^2)$ peut être négligé dans notre approximation, c'est-à-dire

$$r_{02} = r_2 \sqrt{1 + \frac{2m_1}{m_0 + m_1} \frac{(\vec{r}_1 | \vec{r}_2)}{r_2^2} + \mathcal{O}(m_1^2)}. \quad (\text{C.19})$$

Par un développement de Taylor de la racine carrée, nous obtenons

$$r_{02} = r_2 \left(1 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{(\vec{r}_1 | \vec{r}_2)}{r_2^2} \right) + \mathcal{O}(m_1^2). \quad (\text{C.20})$$

En inversant et par un développement de Taylor de la parenthèse, nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{02}} &= \frac{1}{r_2} \left(1 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{(\vec{r}_1 | \vec{r}_2)}{r_2^2} \right)^{-1} + \mathcal{O}(m_1^2) \\ &= \frac{1}{r_2} \left(1 - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{(\vec{r}_1 | \vec{r}_2)}{r_2^2} \right) + \mathcal{O}(m_1^2), \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

ce qui peut également s'écrire

$$\frac{1}{r_{02}} - \frac{1}{r_2} = -\frac{m_1}{m_0 + m_1} \frac{(\vec{r}_1 | \vec{r}_2)}{r_2^3} + \mathcal{O}(m_1^2). \quad (\text{C.22})$$

En introduisant cette expression dans l'Hamiltonien (C.16), nous obtenons

$$\mathcal{H} = -\frac{Gm_0m_1}{2a_1} - \frac{Gm_0m_2}{2a_2} - G \left[\frac{m_1m_2}{r_{12}} - \frac{m_0m_1m_2}{m_0 + m_1} \frac{(\vec{r}_1 | \vec{r}_2)}{r_2^3} \right] + \mathcal{O}(m_1^2m_2), \quad (\text{C.23})$$

où le vecteur \vec{r}_{12} vaut par définition

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \vec{r}_1, \quad (\text{C.24})$$

et où la fraction $\frac{m_0}{m_0 + m_1}$ peut elle-même être développée en fonction des petites masses

$$\frac{m_0}{m_0 + m_1} = 1 - \frac{m_1}{m_0} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{m_1}{m_0} \right)^2 \right). \quad (\text{C.25})$$

En ne conservant que les termes de premier et de second degrés des masses, l'Hamiltonien du problème des trois corps dans les variables canoniques de Delaunay exprimées dans le repère de Jacobi s'écrit au final :

$$\mathcal{H} = -\frac{Gm_0m_1}{2a_1} - \frac{Gm_0m_2}{2a_2} - Gm_1m_2 \left[\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} - \frac{(\vec{r}_1 | \vec{r}_2)}{r_2^3} \right]. \quad (\text{C.26})$$

Nous pouvons interpréter ce résultat comme une somme de deux problèmes de deux corps perturbés. En effet, le premier (resp. second) terme de cette expression n'est autre que l'Hamiltonien du problème des deux corps entre le corps central de masse m_0 et la planète de masse m_1 (resp. de masse m_2). Le dernier terme représente la perturbation de ces problèmes de deux corps induite par les interactions des planètes entre elles. L'Hamiltonien ne dépend plus que de deux vecteurs de position, \vec{r}_1 et \vec{r}_2 , et a donc été réduit à six degrés de liberté grâce au passage aux éléments de Jacobi réalisant la réduction du centre de masse.

Annexe D

Séries caractéristiques de la dynamique de l'exosystème ν Andromède supposé coplanaire

Afin d'illustrer les différentes moyennisations des fonctions hamiltoniennes par transformées de Lie, nous exposons, dans cette annexe, les séries caractéristiques de la dynamique séculaire du système extrasolaire ν Andromède (2006b). Le nombre de termes de ces séries étant peu élevé dans le cas de systèmes coplanaires, les plans orbitaux des deux planètes qui composent cet exosystème sont, dans la suite, supposés coplanaires. La Section D.1 regroupe les termes de l'Hamiltonien séculaire \mathcal{K} (3.6) correspondant au rapport des demi-grands axes $\alpha = 0.331$ du système ν Andromède (2006b). L'Hamiltonien \mathcal{K}' (4.2) obtenu après une transformation de découplage de l'Hamiltonien précédent est, quant à lui, exposé à la Section D.2. Toujours pour ce même système extrasolaire, les Sections D.3 et D.4 contiennent respectivement les formulations de l'Hamiltonien moyenné $\bar{\mathcal{K}}'$ (4.5) par rapport aux variables p'_i et du générateur \mathcal{W} (4.4) d'une telle transformation.

D.1 Série \mathcal{K} (Eq. (3.6))

TAB. D.1: Hamiltonien \mathcal{K} (3.6) correspondant au rapport de demi-grands axes $\alpha = 0.331$ caractéristique de l'exosystème ν Andromède (2006b) supposé coplanaire (83 termes)

	λ_1	λ_2	p_1	p_2	q_1	q_2	L_1	L_2	S_1	S_2	E_1	E_2	Coefficient
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0.5109807305602709E-01
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0.5109807305602709E-01
cos	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	-0.4168383194502253E-01

suite de la page précédente													
	λ_1	λ_2	p_1	p_2	q_1	q_2	L_1	L_2	S_1	S_2	E_1	E_2	Coefficient
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0.6844899849005130E-01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0.1223623770492700E+00
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	-0.7267809965416358E-02
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	3	-0.1254315028525000E+00
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	3	1	-0.4344427818699494E-01
COS	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	2	2	0.2285763373257444E-01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0.8985661903138456E-01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	4	0.2542280646943720E+00
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	2	0.1655421567758291E-01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	-0.1987465383456541E-02
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	5	-0.2602655755363910E+00
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	3	3	-0.1991135391074120E+00
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	5	1	0.6817354771572627E-02
COS	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	2	4	0.1029411807838370E+00
COS	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	4	2	0.2020875656153398E-01
COS	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	3	3	-0.1220543586792481E-01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0.1237146150490600E+00
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	6	0.5269843030136150E+00
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	4	0.1578041353385250E+00
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	2	-0.8927982514859923E-02
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	-0.1074946392470022E-03
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	7	-0.4828523089534090E+00
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	3	5	-0.6470748321393870E+00
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	5	3	-0.3181361129924601E-01
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	7	1	0.3593877108141739E-02
COS	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	2	6	0.3009405051758900E+00
COS	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	4	4	0.1470957258774400E+00
COS	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	6	2	-0.2839890517597225E-02
COS	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	3	5	-0.7569754699643498E-01
COS	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	5	3	-0.1072880898679734E-01
COS	0	0	4	-4	0	0	0	0	0	0	4	4	0.6684361801803092E-02
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0.1799700058523800E+00
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	8	0.1093340226253930E+01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	6	0.6804696740944221E+00
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	4	0.1328169693703979E-01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	2	-0.3834287509706263E-02
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0.4236274815553009E-04
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	9	-0.8702267947416770E+00
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	3	7	-0.1826652117747100E+01
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	5	5	-0.3788210995510060E+00

suite de la page précédente													
	λ_1	λ_2	p_1	p_2	q_1	q_2	L_1	L_2	S_1	S_2	E_1	E_2	Coefficient
cos	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	7	3	0.2035872821134256E-01
cos	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	9	1	0.3049566586363840E-03
cos	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	2	8	0.7426198630681140E+00
cos	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	4	6	0.6664778686489660E+00
cos	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	6	4	0.3045190573178728E-01
cos	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	8	2	-0.2756391404108198E-02
cos	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	3	7	-0.2914459277558830E+00
cos	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	5	5	-0.1083262604715800E+00
cos	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	7	3	0.1063598872418567E-02
cos	0	0	4	-4	0	0	0	0	0	0	4	6	0.5381004089418631E-01
cos	0	0	4	-4	0	0	0	0	0	0	6	4	0.6268964811477533E-02
cos	0	0	5	-5	0	0	0	0	0	0	5	5	-0.3791866423441042E-02
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	0.2738441665341070E+00
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	10	0.2259506047075680E+01
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	8	0.2331343275358030E+01
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	6	0.3147918207956130E+00
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	4	-0.2293445905244190E-01
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	2	-0.2972810890850906E-03
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0.1117823782034040E-04
cos	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	11	-0.1566130177456440E+01
cos	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	3	9	-0.4765254076047350E+01
cos	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	5	7	-0.2041982712076450E+01
cos	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	7	5	-0.2180200462467415E-01
cos	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	9	3	0.1026837530183595E-01
cos	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	11	1	-0.1347187846092770E-03
cos	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	2	10	0.1692319447067370E+01
cos	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	4	8	0.2416057819923180E+01
cos	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	6	6	0.4049468694917970E+00
cos	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	8	4	-0.1887561378307223E-01
cos	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	10	2	-0.3776112686552896E-03
cos	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	3	9	-0.9084034319624410E+00
cos	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	5	7	-0.6298218898433040E+00
cos	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	7	5	-0.2825485494671060E-01
cos	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	9	3	0.2013863937763222E-02
cos	0	0	4	-4	0	0	0	0	0	0	4	8	0.2596925214591560E+00
cos	0	0	4	-4	0	0	0	0	0	0	6	6	0.8034855304365540E-01
cos	0	0	4	-4	0	0	0	0	0	0	8	4	-0.2771512152143383E-03
cos	0	0	5	-5	0	0	0	0	0	0	5	7	-0.3790029121822806E-01
cos	0	0	5	-5	0	0	0	0	0	0	7	5	-0.3892274122970336E-02
cos	0	0	6	-6	0	0	0	0	0	0	6	6	0.2223177710591045E-02

D.2 Série \mathcal{K}' (Eq. (4.2))

TAB. D.2: Hamiltonien \mathcal{K}' (4.2) obtenu par la transformation de découplage (3.12), dans le cas de l'exosystème ν Andromède (2006b)

	λ_1	λ_2	p_1	p_2	q_1	q_2	L_1	L_2	S_1	S_2	E_1	E_2	Coefficient
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0.4010814960118014E-01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0.5426896105348666E-01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0.3064177290681850E-01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0.7490085172216920E-01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0.2726518444706008E-02
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	3	-0.3048125317174130E-01
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	3	1	-0.8432868059399806E-01
COS	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	2	2	-0.8731289309759560E-03
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0.3811678257578673E-01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	4	0.1919798805944790E+00
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	2	0.1385122754860160E+00
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	-0.1929197768502279E-02
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	5	-0.9676293482513999E-01
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	3	3	-0.3575151743797000E+00
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	5	1	-0.4863583233185451E-01
COS	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	2	4	0.3855306454111710E-01
COS	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	4	2	0.9809114074600819E-01
COS	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	3	3	-0.4367438694923274E-02
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0.6821496186342979E-01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	6	0.6920727220740430E+00
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	4	0.1193781468537570E+01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	2	0.1933339326717450E+00
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	-0.2378540910420021E-02
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	7	-0.3147243951144410E+00
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	3	5	-0.1796417895189540E+01
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	5	3	-0.1141246003585580E+01
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	7	1	-0.2218787088055769E-01
COS	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	2	6	0.2743919780756510E+00
COS	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	4	4	0.9483204119813470E+00
COS	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	6	2	0.1746794891325040E+00
COS	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	3	5	-0.1065651016652850E+00
COS	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	5	3	-0.1804683586351200E+00
COS	0	0	4	-4	0	0	0	0	0	0	4	4	0.1538324223892521E-01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0.1728916848615390E+00

suite de la page précédente													
	λ_1	λ_2	p_1	p_2	q_1	q_2	L_1	L_2	S_1	S_2	E_1	E_2	Coefficient
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	8	0.3143918111142500E+01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	6	0.9692086617093420E+01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	4	0.5146982594065770E+01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	2	0.2443545365168280E+00
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	-0.2337985717305897E-02
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	9	-0.1218786072397660E+01
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	3	7	-0.1075059237995590E+02
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	5	5	-0.1497290880140560E+02
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	7	3	-0.2889167643309030E+01
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	9	1	0.3173721744789822E-02
COS	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	2	8	0.1674896788250980E+01
COS	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	4	6	0.8489420533627319E+01
COS	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	6	4	0.5235156691341990E+01
COS	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	8	2	0.2463802050900470E+00
COS	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	3	7	-0.1134230820490680E+01
COS	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	5	5	-0.3215512783644460E+01
COS	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	7	3	-0.6739624094973440E+00
COS	0	0	4	-4	0	0	0	0	0	0	4	6	0.3798021032149000E+00
COS	0	0	4	-4	0	0	0	0	0	0	6	4	0.4751416691508660E+00
COS	0	0	5	-5	0	0	0	0	0	0	5	5	-0.5042557677080828E-01
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	0.6064791201938780E+00
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	10	0.1733206194646320E+02
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	8	0.8387999377838290E+02
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	6	0.9011558266718021E+02
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	4	0.1896175570499640E+02
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	2	0.2517912948094120E+00
COS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	0	-0.2158228810088845E-02
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	11	-0.5773563860011110E+01
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	3	9	-0.7448300450346240E+02
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	5	7	-0.1785048789725520E+03
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	7	5	-0.9030557371929720E+02
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	9	3	-0.6621297093023090E+01
COS	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	11	1	0.3955003196873944E-01
COS	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	2	10	0.1085908633965900E+02
COS	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	4	8	0.7931490340157789E+02
COS	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	6	6	0.9881025933946880E+02
COS	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	8	4	0.2148005628957530E+02
COS	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	10	2	0.2850404965622810E+00
COS	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	3	9	-0.1057796883796290E+02
COS	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	5	7	-0.4552006339646660E+02

suite de la page précédente													
	λ_1	λ_2	p_1	p_2	q_1	q_2	L_1	L_2	S_1	S_2	E_1	E_2	Coefficient
cos	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	7	5	-0.2748798734592720E+02
cos	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	9	3	-0.1851436107983010E+01
cos	0	0	4	-4	0	0	0	0	0	0	4	8	0.5685376905592230E+01
cos	0	0	4	-4	0	0	0	0	0	0	6	6	0.1355020895076620E+02
cos	0	0	4	-4	0	0	0	0	0	0	8	4	0.3022803910214410E+01
cos	0	0	5	-5	0	0	0	0	0	0	5	7	-0.1607508828311410E+01
cos	0	0	5	-5	0	0	0	0	0	0	7	5	-0.1648342207668340E+01
cos	0	0	6	-6	0	0	0	0	0	0	6	6	0.1874309647473050E+00

D.3 Série $\bar{\mathcal{K}}'$ (Eq. (4.5))

TAB. D.3: Hamiltonien $\bar{\mathcal{K}}'$ (4.5) obtenu par moyennisation de l'Hamiltonien \mathcal{K}' (Table D.2) par rapport aux variables angulaires p'_i , dans le cas de l'exosystème ν Andromède (2006b)

	λ_1	λ_2	p_1	p_2	q_1	q_2	L_1	L_2	S_1	S_2	E_1	E_2	Coefficient
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0.4010814960118014E-01
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0.5426896105348666E-01
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0.3064177290681850E-01
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0.7490085172216920E-01
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0.2726518444706008E-02
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0.1361823335310808E-01
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	4	0.4048748245992900E-01
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	2	-0.3828717490008959E-01
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0.1104926527600939E-01
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0.1278588000269533E-02
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	6	-0.2093166492437099E-01
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	4	-0.1622256846220200E+00
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	2	-0.4409428667632272E-01
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0.1100803607201456E-01
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	-0.2559881633540890E-02
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	8	-0.6180357535418186E-01
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	6	-0.2972321803568460E+00
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	4	-0.1867246818729980E+00
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	2	-0.2401299330701200E-01
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0.7186202101495634E-02
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	-0.1482793346294137E-02

suite de la page précédente													
	λ_1	λ_2	p_1	p_2	q_1	q_2	L_1	L_2	S_1	S_2	E_1	E_2	Coefficient
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	10	-0.5958212363436854E-01
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	8	-0.3153119569169360E+00
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	6	-0.2364661632894280E+00
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	4	-0.4024395775075740E-01
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	2	0.3717908564226651E-01
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0.1121609520736288E-02

D.4 Générateur \mathcal{W} (Eq. (4.4))

TAB. D.4: Générateur \mathcal{W} (Eq. (4.4)) de la moyennisation de l'Hamiltonien \mathcal{K}' (Table D.2) par rapport aux variables p'_i

	λ_1	λ_2	p_1	p_2	q_1	q_2	L_1	L_2	S_1	S_2	E_1	E_2	Coefficient
sin	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	3	-0.6859131819361707E-01
sin	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	3	1	-0.1897630432344980E+00
sin	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	2	2	-0.9823917670180753E-03
sin	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	5	-0.3600566089450685E-01
sin	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	3	3	-0.3582384819044880E+00
sin	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	5	1	-0.2513902250358590E+00
sin	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	2	4	0.4601062818838519E-01
sin	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	4	2	0.1096226672736310E+00
sin	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	3	3	-0.2696673719947341E-02
sin	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	7	-0.2519752837356414E-02
sin	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	3	5	-0.7713766941960370E+00
sin	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	5	3	-0.9647360030024630E+00
sin	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	7	1	-0.1063615547614243E-02
sin	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	2	6	0.1950155482694300E+00
sin	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	4	4	0.8664897667187030E+00
sin	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	6	2	0.6292145247003170E+00
sin	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	3	5	-0.6220799630607783E-01
sin	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	5	3	-0.1320559892325270E+00
sin	0	0	4	-4	0	0	0	0	0	0	4	4	0.1111505558825304E-01
sin	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	9	-0.2391211005544900E+00
sin	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	3	7	-0.3342894418109900E+01
sin	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	5	5	-0.7091036917575150E+01
sin	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	7	3	-0.2071814971407800E+01

suite de la page précédente													Coefficient
	λ_1	λ_2	p_1	p_2	q_1	q_2	L_1	L_2	S_1	S_2	E_1	E_2	
sin	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	9	1	0.3675607972901600E+01
sin	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	2	8	0.6527576652945880E+00
sin	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	4	6	0.4172666720981130E+01
sin	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	6	4	0.4676487906041140E+01
sin	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	8	2	0.2686659663198790E+00
sin	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	3	7	-0.5789827218769330E+00
sin	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	5	5	-0.2371525516656760E+01
sin	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	7	3	-0.1699684683759100E+01
sin	0	0	4	-4	0	0	0	0	0	0	4	6	0.2000198507928460E+00
sin	0	0	4	-4	0	0	0	0	0	0	6	4	0.3252217860744040E+00
sin	0	0	5	-5	0	0	0	0	0	0	5	5	-0.2676312918000519E-01
sin	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	1	11	-0.2201338136901850E+01
sin	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	3	9	-0.2169768856292160E+02
sin	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	5	7	-0.6392323547770940E+02
sin	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	7	5	-0.5464094611189420E+02
sin	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	9	3	0.2820414369944190E+02
sin	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	11	1	0.2291559889070910E+02
sin	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	2	10	0.3195072747652440E+01
sin	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	4	8	0.2672331101507260E+02
sin	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	6	6	0.4389625482782630E+02
sin	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	8	4	-0.9912427088331070E+01
sin	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	10	2	-0.4561165610869140E+02
sin	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	3	9	-0.3550324397377730E+01
sin	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	5	7	-0.2080122311581520E+02
sin	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	7	5	-0.2359422440186740E+02
sin	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	9	3	-0.3165720952903790E+01
sin	0	0	4	-4	0	0	0	0	0	0	4	8	0.2595561143938500E+01
sin	0	0	4	-4	0	0	0	0	0	0	6	6	0.8846464151663840E+01
sin	0	0	4	-4	0	0	0	0	0	0	8	4	0.5653243196846610E+01
sin	0	0	5	-5	0	0	0	0	0	0	5	7	-0.7338549148336780E+00
sin	0	0	5	-5	0	0	0	0	0	0	7	5	-0.1088422945273680E+01
sin	0	0	6	-6	0	0	0	0	0	0	6	6	0.8185040613057994E-01

Annexe E

Contributions

Libert, A.-S., Henrard, J., 2005. Analytical approach to the secular behaviour of exoplanetary systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 93, 187–200

Libert, A.-S., Henrard, J., 2006. Secular apsidal configuration of non-resonant exoplanetary systems, *Icarus*, 183, 186–192

Libert, A.-S., Henrard, J., 2007. Analytical study of the proximity of exoplanetary systems to mean-motion resonances, *Astronomy and Astrophysics*, 461, 759–763

Libert, A.-S., Henrard, J., 2007. Exoplanetary systems : The role of an equilibrium at high mutual inclination in shaping the global behaviour of the 3-D secular planetary three-body problem, accepté dans *Icarus*, doi :10.1016/j.icarus.2007.05.007

Libert, A.-S., Henrard, J., 2007. Secular frequencies of 3-D exoplanetary systems, soumis à *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*

Bibliographie

- [Abdullah et Albouy, 2001] Abdullah, K., Albouy, A., 2001. On a strange resonance noticed by M. Herman, *Regular and Chaotic Dynamics*, v6, no4, 421–432
- [Abu-el-Ata et Chapront, 1975] Abu-el-Ata, N., Chapront, J., 1975. Développements analytiques de l'inverse de la distance en mécanique céleste, *Astronomy and Astrophysics*, 38, 57–66
- [Beaugé et Michtchenko, 2003a] Beaugé, C., Michtchenko, T.A., 2003. Modelling the high-eccentricity planetary three-body problem. Application to the GJ876 planetary system, *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society*, 341, 760–770
- [Beaugé et al., 2003b] Beaugé, C., Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T.A., 2003. Extrasolar planets in mean-motion resonance: apses alignment and asymmetric stationary solutions, *The Astrophysical Journal*, 593, 1124–1133
- [Beaugé et al., 2006] Beaugé, C., Michtchenko, T.A., Ferraz-Mello, S., 2006. Planetary migration and extrasolar planets in the 2/1 mean-motion resonance, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 365, 1160–1170
- [Brouwer et Clemence, 1961] Brouwer, D., Clemence, G.M., 1961. *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York
- [Butler et al., 1999] Butler, R.P., Marcy, G.W., Fischer D.A., et al., 1999. Evidence for multiple companions to υ Andromedae, *The Astrophysical Journal*, 526, 916–927
- [Callegari et al., 2004] Callegari, N., Michtchenko, T.A., Ferraz-Mello, S., 2004. Dynamics of two planets in the 2/1 mean-motion resonance, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 89, 201–234
- [Callegari et al., 2006] Callegari, N., Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T.A., 2006. Dynamics of two planets in the 3/2 mean-motion resonance: Application to the planetary system of the pulsar PSR B1257+12, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 94, 381–397
- [Casoli et Encrenaz, 2005] Casoli, F., Encrenaz, T., 2005. *Planètes extrasolaires : Les nouveaux mondes*, Belin/Pour la Science
- [Champenois, 1998] Champenois, S., 1998. *Dynamique de la résonance entre Mimas et Téthys, premier et troisième satellites de Saturne*, Thèse, Observatoire de Paris

- [Chauvin et al., 2005] Chauvin, G., Lagrange, A.-M., Dumas, C., et al., 2005. Giant planet companion to 2MASSW J1207334-393254, *Astronomy and Astrophysics*, 438, 25–28
- [Chiang et al., 2001] Chiang, E.I., Tabachnik, S., Tremaine, S., 2001. Apsidal alignment in ν Andromedae, *The Astronomical Journal*, 122, 1607–1615
- [Chiang et Murray, 2002] Chiang, E.I., Murray, N., 2002. Eccentricity excitation and apsidal resonance capture in the planetary system ν Andromedae, *The Astrophysical Journal*, 576, 473–477
- [Correia et al., 2005] Correia, A.C.M., Udry, S., Mayor, M., et al., 2005. The CORALIE survey for southern extra-solar planets. XIII. A pair of planets around HD 202206 or a circumbinary planet ?, *Astronomy and Astrophysics*, 440, 751–758
- [Deprit, 1969] Deprit, A., 1969. Canonical transformations depending on a small parameter, *Celestial Mechanics*, 1, 12–30
- [Ecole CNRS de Goutelas, 2005] Ecole CNRS de Goutelas XXVIII, *Formation planétaire et exoplanètes*, Ouvrage collectif dirigé par J.-L. Halbwachs, D. Egret et J.-M. Hameury
- [Ellis et Murray, 2000] Ellis, K.M., Murray, C.D., 2000. The disturbing function in solar system dynamics, *Icarus*, 147, 129–144
- [Érdi et al., 2004] Érdi, B., Dvorak, R., Sándor, Zs., et al., 2004. The dynamical structure of the habitable zone in the HD 38529, HD 168443 and HD 169830 systems, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 351, 1043–1048
- [Érdi et Sándor, 2005] Érdi, B., Sándor, Zs., 2005. Stability of co-orbital motion in exoplanetary systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 92, 113–121
- [Ferraz-Mello et al., 2005a] Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T.A., Beaugé, C., Callegari, N., 2005. Extrasolar planetary systems, in *Chaos and Stability in Planetary Systems* (R. Dvorak, F. Freistetter and J. Kurths Eds), Lecture Notes in Physics, 683, 219–271
- [Ferraz-Mello et al., 2005b] Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T.A., Beaugé, C., 2005. The orbits of the extrasolar planets HD 82943 c and b, *The Astrophysical Journal*, 621, 473–481
- [Ford et al., 2005] Ford, E.B., Lystad, V., Rasio, F.A., 2005. Planet-planet scattering in the ν Andromedae system, *Nature*, 434, 873–876
- [Goldreich et Tremaine, 1980] Goldreich, P., Tremaine, S., 1980. Disk-satellite interactions, *The Astrophysical Journal*, 241, 425–441
- [Hadjidemetriou, 2002] Hadjidemetriou, J.D., 2002. Resonant periodic motion and the stability of extrasolar planetary systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 83, 141–154

- [Hadjidemetriou et Psychoyos, 2003] Hadjidemetriou, J.D., Psychoyos, D., 2003. Dynamics of extrasolar planetary systems: 2/1 resonant motion, in *Galaxies and Chaos* (G. Contopoulos and N. Voglis Eds), Lecture Notes in Physics, 626, 412–432
- [Hadjidemetriou, 2006] Hadjidemetriou, J.D., 2006. Symmetric and asymmetric librations in extrasolar planetary systems: a global view, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 95, 225–244
- [Henrard, 1973] Henrard, J., 1973. The algorithm of the inverse for Lie transform, in *Recent Advances in Dynamical Astronomy* (B.D. Tapley and V. Szebehely Eds), Astrophysics and Space Science Library, 39, 250–259
- [Henrard, 1986] Henrard, J., 1986. Algebraic manipulation on computers for lunar and planetary theories, in *Relativity in Celestial Mechanics and Astrometry. High Precision Dynamical Theories and Observational Verifications*. (J. Kovalevsky and V.A. Brumberg Eds), Reidel, Holland, 59–62
- [Henrard, 2002] Henrard, J., 2002. The Web of periodic orbits at L_4 , *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 83, 291–302
- [Henrard et Lemaître, 2005] Henrard, J., Lemaître, A., 2005. The untangling transformation, *The Astronomical Journal*, 130, 2415–2417
- [Henrard et Libert, 2005] Henrard, J., Libert, A.-S., 2005. The secular planetary three body problem revisited, in *Dynamics of populations of planetary systems* (Knežević and Milani Eds), Cambridge University Press, Cambridge, 49–54
- [Henrard et Libert, en préparation] Henrard, J., Libert, A.-S., 2007. Periodic orbits as centers of stability in the secular 3D planetary three-body problem, submitted to *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*
- [Hori, 1966] Hori, G., 1966. Theory of general perturbations with unspecified canonical variables, *The Astronomical Society of Japan*, 18, 287–296
- [Innanen et al., 1997] Innanen, K.A., Zheng, J.Q., Mikkola, S., Valtonen, M.J., 1997. The Kozai mechanism and the stability of planetary orbits in binary star systems, *The Astronomical Journal*, 113, 1915–1919
- [Jacobi, 1842] Jacobi, C.G.J., 1842. Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps, *Astronomische Nachrichten*, 20, 81–102
- [Jefferys et Moser, 1966] Jefferys, W.H., Moser, J., 1966. Quasi-periodic solutions for the three-body problem, *The Astronomical Journal*, 71, 568–578
- [Ji et al., 2003] Ji, J.-H., Liu, L., Zhou, J.-L., Kinoshita, H., 2003. The apsidal motion in multiple planetary systems, *Chinese Astronomy and Astrophysics*, 27, 127–132

- [Kaula, 1962] Kaula, W.M., 1962. Development of the lunar and solar disturbing functions for a close satellite, *The Astronomical Journal*, 67, 300–303
- [Kozai, 1962] Kozai, Y., 1962. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity, *The Astronomical Journal*, 67, 591–598
- [Lainey et al., 2006] Lainey, V., Duriez, L., Vienne, A., 2006. Synthetic representation of the Galilean satellites' orbital motions from L1 ephemerides, *Astronomy and Astrophysics*, 456, 783–788
- [Laskar, 1990] Laskar, J., 1990. Systèmes de variables et éléments, dans *Les méthodes modernes de la mécanique céleste* (D. Benest and C. Froeschlé Eds), éditions Frontières, 63–87
- [Laskar, 1993] Laskar, J., 1993. Frequency analysis for multi-dimensional systems, *Physica D*, 67, 257–281
- [Laskar et Robutel, 1995] Laskar, J., Robutel, P., 1995. Stability of the planetary three-body problem. I Expansion of the planetary Hamiltonian, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 62, 193–217
- [Laskar, 1997] Laskar, J., 1997. Large scale chaos and the spacing of the inner planets, *Astronomy and Astrophysics*, 317, L75–L78
- [Lee et Peale, 2002] Lee, M.H., Peale, S.J., 2002. Dynamics and origin of the 2 : 1 orbital resonances of the GJ 876 planets, *The Astrophysical Journal*, 567, 596–609
- [Lee et Peale, 2003] Lee, M.H., Peale, S.J., 2003. Secular evolution of hierarchical planetary systems, *The Astrophysical Journal*, 592, 1201–1216
- [Lee, 2004] Lee, M.H., 2004. Diversity and origin of 2 : 1 orbital resonances in extrasolar planetary systems, *The Astrophysical Journal*, 611, 517–527
- [Lee et al., 2006] Lee, M.H., Butler, R.P., Fischer, D.A., et al., 2006. On the 2 : 1 orbital resonance in the HD 82943 planetary system, *The Astrophysical Journal*, 641, 1178–1187
- [Le Verrier, 1855] Le Verrier, U.-J., 1855. Recherches astronomiques : Chapitre IV. - Développement de la fonction qui sert de base au calcul des perturbations des mouvements des planètes, *Annales de l'Observatoire de Paris*, vol. 1, 258–342
- [Libert, 2004] Libert, A.-S. 2004. *Dynamique séculaire du problème des trois corps : excentricités faibles et moyennes et inclinaisons nulles*, Mémoire de licence, Département de mathématique, FUNDP, Namur
- [Libert et Henrard, 2005] Libert, A.-S., Henrard, J., 2005. Analytical approach to the secular behaviour of exoplanetary systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 93, 187–200
- [Libert et Henrard, 2006] Libert, A.-S., Henrard, J., 2006. Secular apsidal configuration of non-resonant exoplanetary systems, *Icarus*, 183, 186–192

- [Libert et Henrard, 2007a] Libert, A.-S., Henrard, J., 2007. Analytical study of the proximity of exoplanetary systems to mean-motion resonances, *Astronomy and Astrophysics*, 461, 759–763
- [Libert et Henrard, 2007b] Libert, A.-S., Henrard, J., 2007. Exoplanetary systems : The role of an equilibrium at high mutual inclination in shaping the global behaviour of the 3-D secular planetary three-body problem, accepted in *Icarus*, doi:10.1016/j.icarus.2007.05.007
- [Libert et Henrard, 2007c] Libert, A.-S., Henrard, J., 2007. Secular frequencies of 3-D exoplanetary systems, submitted to *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*
- [Lin et Papaloizou, 1986] Lin, D.N.C., Papaloizou, J., 1986. On the tidal interaction between protoplanets and the protoplanetary disk. III - Orbital migration of protoplanets, *The Astrophysical Journal*, 309, 846–857
- [Lin et al., 1996] Lin, D.N.C., Bodenheimer, P., Richardson, D.C., 1996. Orbital migration of the planetary companion of 51 Pegasi to its present location, *Nature*, 380, 606–607
- [Lissauer et Rivera, 2001] Lissauer, J.L., Rivera, E.J., 2001. Stability analysis of the planetary system orbiting ν Andromedae. II. Simulations using new Lick Observatory fits, *The Astrophysical Journal*, 554, 1141–1150
- [Malhotra, 2002] Malhotra, R., 2002. A dynamical mechanism for establishing apsidal resonance, *The Astrophysical Journal*, 575, 33–36
- [Malige et al., 2002] Malige, F., Robutel, P., Laskar, J., 2002. Partial reduction in the N-body planetary problem using the angular momentum integral, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 84, 283–316
- [Marzari et Weidenschilling, 2002] Marzari, F., Weidenschilling, S.J., 2002. Eccentric extra-solar planets : The jumping Jupiter model, *Icarus*, 156, 570–579
- [Mayor et Queloz, 1995] Mayor, M., Queloz, D., 1995. A Jupiter-mass companion to a solar-type star, *Nature*, 378, 355–359
- [Mayor et al., 2004] Mayor, M., Udry, S., Naef, D., et al., 2004. The CORALIE survey for southern extra-solar planets. XII. Orbital solutions for 16 extra-solar planets discovered with CORALIE, *Astronomy and Astrophysics*, 415, 391–402
- [Michtchenko et Ferraz-Mello, 2001] Michtchenko, T.A., Ferraz-Mello, S., 2001. Modeling the 5 : 2 mean-motion resonance in the Jupiter-Saturn planetary system, *Icarus*, 149, 357–374
- [Michtchenko et Malhotra, 2004] Michtchenko, T.A., Malhotra, R., 2004. Secular dynamics of the three-body problem : application to the ν Andromedae planetary system, *Icarus*, 168, 237–248

- [Michtchenko et al., 2006a] Michtchenko, T.A., Beaugé, C., Ferraz-Mello, S., 2006. Stationary orbits in resonant extrasolar planetary systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 94, 411–432
- [Michtchenko et al., 2006b] Michtchenko, T.A., Ferraz-Mello, S., Beaugé, C., 2006. Modeling the 3-D secular planetary three-body problem. Discussion on the outer ν Andromedae planetary system, *Icarus*, 181, 555–571
- [Migaszewski et Goździewski, en préparation] Migaszewski, C., Goździewski, K., 2007. *The 3-D secular dynamics of the HD 12661 planetary system*, séminaire donné à SUPA/SUSSP 62, Ile de Skye, 1er juin 2007
- [Morbideilli, 2002] Morbidelli, A., 2002. *Modern celestial mechanics: aspects of solar system dynamics*, Taylor and Francis, London
- [Murray et al., 1998] Murray, N., Hansen, B., Holman, M., Tremaine, S., 1998. Migrating planets, *Science*, 279, 69–72
- [Murray et Dermott, 1999] Murray, C.D., Dermott, S.F., 1999. *Solar system dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK
- [Pauwels, 1983] Pauwels, T., 1983. Secular orbit-orbit resonance between two satellites with non-zero masses, *Celestial Mechanics*, 30, 229–247
- [Perryman, 2000] Perryman, M.A.C., 2000. Extra-solar planets, *Reports on Progress in Physics*, 63, 1209–1272
- [Poincaré, 1892] Poincaré, H., 1892. *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, 3 volumes (1892, 1893 et 1899), Gauthier-Villars, Paris, réédité par Blanchard en 1987
- [Robutel, 1995] Robutel, P., 1995. Stability of the planetary three-body problem. II KAM theory and existence of quasiperiodic motions, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 62, 219–261
- [Rodríguez et Gallardo, 2005] Rodríguez, A., Gallardo, T., 2005. The dynamics of the HD 12661 extrasolar planetary system, *The Astrophysical Journal*, 628, 1006–1013
- [Sándor et al., 2007] Sándor, Zs., Süli, Á., Érdi, B., et al., 2007. A stability catalogue of the habitable zones in extrasolar planetary systems, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 375, 1495–1502
- [Stepinski et al., 2000] Stepinski, T., Malhotra, R., Black, D., 2000. The ν Andromedae system: models and stability, *The Astrophysical Journal*, 545, 1044–1057
- [Stromgren, 1933] Stromgren, E., 1933. *Bulletin Astronomique*, 9, 87
- [Takeda et Rasio, 2005] Takeda, G., Rasio, F.A., 2005. High orbital eccentricities of extrasolar planets induced by the Kozai mechanism, *The Astrophysical Journal*, 627, 1001–1010

- [Veras et Armitage, 2007] Veras, D., Armitage, P.J., 2007. Extrasolar planetary dynamics with a generalized planar Laplace-Lagrange secular theory, *The Astrophysical Journal*, 661, 1311–1322
- [Wisdom et Holman, 1991] Wisdom, J., Holman, M., 1991. Symplectic maps for the n-body problem, *The Astronomical Journal*, 102, 1528–1538
- [Wittenmyer et al., 2007] Wittenmyer, R.A., Endl, M., Cochran, W.D., 2007. Long-period objects in the extrasolar planetary systems 47 Ursae Majoris and 14 Herculis, *The Astrophysical Journal*, 654, 625–632
- [Wolszczan et Frail, 1992] Wolszczan, A., Frail, D.A., 1992. A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257+12, *Nature*, 335, 145–147
- [Wu et Murray, 2003] Wu, Y., Murray, N., 2003. Planet migration and binary companions: the case of HD 80606b, *The Astrophysical Journal*, 589, 605–614

